Sammlung

von

Konstruktions- und Rechenaufgaben

aus der

Planimetrie und Stereometrie.

Für

den Schul- und Selbstunterricht

bearbeitet

von

Konrad Fuß.

Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage.

Nürnberg.

Verlag der Friedr. Kornschen Buchhandlung.

1896.

Sammlung

von

Konstruktions- und Rechenaufgaben

aus der

Planimetrie und Stereometrie.

Für

den Schul- und Selbstunterricht

bearbeitet

von

Konrad Fuß.

Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage.

Nürnberg.

Verlag der Friedr. Kornschen Buchhandlung.

1896.

Druck von E. Th. Jacob in Erlangen.

Vorwort
zur zweiten Auflage.

Die vorliegende zweite Auflage meiner Sammlung von Aufgaben aus der Planimetrie und Stereometrie unterscheidet sich in einigen Punkten vom ursprünglichen Plane dieses Werkchens.

Ein Teil der Konstruktionsaufgaben wurde weggelassen, da dieselben im Unterricht doch nur eine beschränkte Anwendung finden; dagegen habe ich, ihrer größeren unterrichtlichen Bedeutung wegen, die Rechenaufgaben fast sämtlicher Abschnitte vermehrt.

Diese Rechenaufgaben wurden durchgehends in zwei Gruppen geschieden; die leichteren sind für das mündliche Rechnen, das freie Kopfrechnen, die schwierigeren zur schriftlichen Darstellung bestimmt. Mit jenen möchte ich den Schulen ein interessantes und instruktives Material für das Kopfrechnen bieten, das der formalen Bildung und den Zwecken des mathematischen Unterrichts sicherlich viel mehr zu dienen geeignet ist, als jene banale Art „eingekleideter“ Rechenbeispiele, die sich noch so häufig in Aufgabensammlungen finden.

Die Resultate und Andeutungen zur Auflösung wurden auf den Wunsch verehrter Kollegen, die meine Sammlung ihrem Unterricht zu Grunde legen, von den Aufgaben getrennt und erscheinen nun als selbständiges Heftchen. Diesem „Schlüssel“ sowohl wie auch der Sammlung selbst wurde eine größere Zahl von Figuren beigegeben.

Eine besondere Berücksichtigung habe ich den angewandten Aufgaben zu Teil werden lassen. Lehren der Physik und Geographie (man vergleiche das Register), die sich geometrisch verwerten lassen, elementare Aufgaben der praktischen Geometrie &c. habe ich so viel wie möglich herangezogen. Dadurch suchte ich der Forderung der neueren Pädagogik, „daß die Mathematik zu den Wissensfächern und zum Leben in Beziehung zu treten habe“, Rechnung

zu tragen[1]). Auch auf das historische Moment habe ich die gebührende Rücksicht genommen (man vergleiche beispielsweise S. 14, 24, 26, 39, 116, 129 u. s. w.)

Der Anhang, der eine größere Anzahl vollständig entwickelter Formeln und ausführlich gelöster Aufgaben, außerdem eine Übersicht der wichtigsten geometrischen Formeln, eine Auswahl von Prüfungsaufgaben sowie eine Zusammenstellung der Maße und Gewichte Deutschlands und einiger anderer Staaten Europas enthält, dürfte manchem willkommen sein.

Und so hoffe ich, daß auch die vorliegende zweite Auflage meiner Aufgabensammlung eine freundliche Aufnahme finden werde[2]).

Altdorf, im März 1896.

Der Verfasser.

---

1) „Zwischen dem Mathematikunterricht und den Wissensfächern muß ein Verkehr hergestellt werden. Dieser nachbarliche Verkehr ist für beide Teile vorteilhaft. Die Wissensfächer gewinnen dadurch an Bestimmtheit und Deutlichkeit, und der Mathematikunterricht an Mannigfaltigkeit, Belebung und Interesse.“ (Dörpfeld.) — „Die mathematischen Studien, vom gemeinen Rechnen bis zur höheren Mathematik hinauf, müssen sich der Naturkenntnis und hiermit der Erfahrung anschließen, um Eingang in den Gedankenkreis des Zöglings zu gewinnen. Denn auch der gründlichste mathematische Unterricht zeigt sich als unpädagogisch, sobald er eine abgesonderte Vorstellungsmasse für sich allein bildet“ (Herbart.) — „Auch in den mathematischen Aufgaben kann das Prinzip der Konzentration gewahrt werden, wenn dieselben ihren Stoff aus dem Gebiete der Naturkunde, Geographie ꝛc. entnehmen.“ (Schiller, praktische Pädagogik.) — „Der Schüler muß im Mathematikunterrichte zu der Erkenntnis geführt werden, daß das, was er gelernt hat, auch einen wirklichen Wert besitzt, daß er mit Hilfe der neu gewonnenen Kenntnisse neue Fragen des Lebens und der Natur zu beantworten in der Lage ist.“ — „Der Mathematikunterricht soll überall ins Leben hinausgreifen und das verpönte Cui bono? immer befriedigen.“ (Sallwürk.)

2) Diese Aufgabensammlung ist in das Verzeichnis der in Bayern genehmigten Lehrmittel aufgenommen worden.

Vorwort
zur ersten Auflage.

Das vorliegende, aus zwei Teilen bestehende Werkchen enthält eine reichhaltige Sammlung planimetrischer und stereometrischer Aufgaben; auch eine größere Anzahl physikalischer Aufgaben, bei deren Auflösung Sätze der Planimetrie und Stereometrie zur Anwendung kommen, wurde ihm einverleibt. Bei der Bearbeitung desselben habe ich mich bemüht, solche Aufgaben auszuwählen, die einerseits durch ihren Inhalt interessant sind und andererseits durch ihre Form zu einer bewußten Auffassung der geometrischen Sätze und zugleich zu einer Wiederholung des gesamten Lehrstoffes der Buchstabenrechnung und Algebra veranlassen.

Den meisten Aufgaben wurde das Resultat ihrer Auflösung beigefügt; viele wurden mit Andeutungen zu ihren Auflösungen versehen; einen großen Teil derselben habe ich vollständig berechnet, und zwar in der Regel sowohl mit Buchstaben als mit bestimmten Zahlen, und im letzteren Fall meistens algebraisch und arithmetisch. Je nach Bedürfnis kann man sich für die eine oder andere Auflösungsweise entscheiden. Die Entwicklung der Auflösungen habe ich möglichst übersichtlich zu gliedern und anzuordnen gesucht. Der Schüler möge daraus ersehen, in welcher Weise er seinen schriftlichen Arbeiten eine gefällige und übersichtliche äußere Ausstattung und Anordnung geben kann.

Schließlich sei noch bemerkt, daß bei der Bearbeitung der vorliegenden Aufgabensammlung die einschlägige mathematische Literatur (z. B. die Werke von Helmes, Nagel, Reidt, Koppe, Hechel, Spitz u. a. m.) benützt wurde.

K. Fuß.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Planimetrische Aufgaben.

Zweiter Teil.

Stereometrische Aufgaben.

Erster Teil.

Planimetrische Aufgaben.

---

§ 1. Punkt und gerade Linie.

Konstruktionsaufgaben *).

1) Durch einen Punkt eine gerade Linie zu ziehen.

2) Zwei Punkte durch eine gerade Linie zu verbinden.

3) Eine Strecke von 5 cm Länge; Verlängerung derselben um 4 cm.

4) Eine Strecke zu zeichnen, welche einer gegebenen gleich ist.

5) Eine Strecke **a**) um die eigne, **b**) um die doppelte, **c**) um die dreifache, **d**) um die vierfache Länge zu vergrößern.

6) Es soll die Summe von **a**) zwei, **b**) drei, **c**) vier gegebenen Strecken als eine Strecke dargestellt werden.

7) Man soll den Unterschied zwischen zwei gegebenen Strecken zeichnen.

8) Es soll eine gegebene gebrochene Linie in eine gerade Linie verwandelt werden.

9) Zwei Strecken zu zeichnen, von welchen die eine **a**) der vierte Teil, **b**) der fünfte Teil der anderen ist.

10) Man zeichne zwei Strecken, von welchen die eine **a**) $^2/_3$, **b**) $^4/_5$, **c**) $^5/_6$ der andern ist.

11) Man ziehe 4 gerade Linien mit 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Durchschnittspunkten.

Rechenaufgaben.

Mündlich.

1) Wie viele Gerade können höchstens zwischen n, 2, 3, 4, 20, 58 Punkten gezogen werden?

2) Zwischen einer gewissen Anzahl von Punkten können 45, 190, 66, 153 gerade Linien gezogen werden; wie viele Punkte sind es?

---

*) Über das Wesen und die Behandlung der Konstruktionsaufgaben vergleiche man Anhang I.

3) In wie vielen Punkten können sich n, 2, 3, 4, 10, 80, 143 Gerade höchstens durchschneiden?

4) Wie viele Gerade müssen sich schneiden, damit 66, 91, 210, c Schnittspunkte entstehen?

Schriftlich.

1) Wie viele Gerade können höchstens zwischen 151, 420 Punkten gezogen werden?

2) Zwischen einer gewissen Anzahl von Punkten können 4950, 59340, c gerade Linien gezogen werden; wie viele Punkte sind es? (q*)

3) 5 Punkte A, B, C, D und E liegen so in gerader Linie, daß AB = 20 m, BC = 6 m, CD = 16 m ist; wie weit ist D von E entfernt, wenn AE = BE + CE + DE ist?

4) Fünf Punkte A, B, C, D und E liegen in gerader Linie; AB = 8 m, DE = 10 m; die beiden Entfernungen BC und CD verhalten sich wie 2 : 3 und die beiden Entfernungen AC und CE wie 3 : 4 zu einander. Wie weit ist B von C, und C von D entfernt?

5) Auf einer geraden Linie liegen 6 Punkte A, B, C, D, E und F so nebeneinander, daß AB = 6 m, BC = 5 m, CD = 12 m, DE = 4 m und EF = 14 m ist. Zwischen C und D soll ein Punkt so angenommen werden, daß die Summe der Entfernungen desselben von A, B und C gleich werde der Summe der Entfernungen von D, E und F. Wie weit ist derselbe von C und D entfernt?

§. 2. Winkel, welche beim Durchschnitt zweier gerader Linien entstehen.

Konstruktionsaufgaben.

1) Einen beliebigen Winkel zu zeichnen.

2) Den einem gegebenen Winkel zugehörigen Nebenwinkel zu zeichnen.

3) Einen Winkel zu zeichnen, der einem andern gegebenen Winkel gleich ist.

4) An eine gegebene gerade Linie in einem a) beliebigen, oder b) gegebenen Punkte einen Winkel anzutragen, der einem gegebenen

*) Aufgaben, deren Auflösung auf unreine Gleichungen vom zweiten Grad führt, sind mit q bezeichnet.

Winkel gleich ist, und zwar sowohl mit Hilfe des Transporteurs als durch Konstruktion.

5) Mittelst des Transporteurs drei Winkel von beziehungsweise 45°, 90°, 124° zu zeichnen.

6) Einen Winkel zu zeichnen, der doppelt so groß ist als ein gegebener Winkel, und zwar **a**) mit Hilfe des Transporteurs, **b**) durch Konstruktion.

7) Einen Winkel zu zeichnen, der der Summe zweier gegebener Winkel gleich ist.

8) Einen Winkel zu zeichnen, der der Summe dreier gegebener Winkel gleich ist.

9) Einen Winkel zu zeichnen, welcher der Differenz zweier gegebener Winkel gleich ist.

Rechenaufgaben.

Mündlich.

1) **a**) Welche Winkel beschreibt der Minutenzeiger einer Uhr in 1, $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$ Stunde? in 1, 10, 25, 36 Minuten?

b) Welche Winkel beschreibt der Stundenzeiger in denselben Zeiten?

c) Welche Winkel bilden die beiden Zeiger einer Uhr miteinander um: 12 Uhr, 3 Uhr, 6 Uhr, 9 Uhr, 1 Uhr, 2 Uhr, 4 Uhr, $4^1/_2$ Uhr, $8^1/_3$ Uhr, 5 Uhr 50 Minuten?

d) Wieviel Bogenminuten legt der große Zeiger in 5, in 1 Zeitminute zurück?

2) Wie bekannt wird der Horizont in gleiche Teile geteilt, wodurch sich die Hauptweltgegenden, die Nebenweltgegenden und die Nebennebenweltgegenden ergeben. Es soll die Größe der einzelnen Bogen und die Entfernung jedes einzelnen Punktes von allen übrigen bestimmt werden.

3) Eine Wetterfahne dreht sich von N nach NO, O, SO und S; wieviel Grade durchläuft sie? Wieviel Grade durchläuft sie, wenn sie sich von N nach NNO und SSW dreht?

4) Wie groß ist der Nebenwinkel eines Winkels: **a**) von 57°; 111°; 96°; **b**) von 83° 36′; 135° 13′; **c**) von 70° 9′ 45″?

5) Die Differenz zweier Nebenwinkel beträgt 28°; wie groß ist jeder derselben?

6) Die Größe zweier Nebenwinkel verhält sich wie 3 : 2; 4 : 5; 1 : 3; wie groß ist jeder?

7) Wie groß ist das Supplement eines Winkels, dessen Größe 75° (68° 45′, 115° 28′ 45″) beträgt?

8) Die Größe eines Winkels beträgt $^2/_5$ R (15° 30′, 48° 45′ 48″); wie groß ist das Komplement desselben?

9) Wie groß ist der konvexe Winkel, dessen Überschuß über zwei Rechte gerade so viel beträgt, als ihm an drei Rechten fehlt?

10) Auf derselben Seite einer geraden Linie liegen um einen gemeinschaftlichen Scheitel drei Winkel: a, b und c; ∠ a = 49° 30′ (72° 41′ 16″); ∠ b = 30° 51′ (16° 27′ 48″); wie groß ist ∠ c?

11) Auf derselben Seite einer Geraden liegen um einen gemeinschaftlichen Scheitel drei Winkel. Die Summe des ersten und zweiten beträgt 109°, die des zweiten und dritten 135°; wie groß ist jeder?

12) Auf derselben Seite einer Geraden liegen vier Winkel um einen gemeinschaftlichen Scheitel, welche sich der Größe nach wie 2 : 3 : 4 : 6 verhalten. Wie groß ist jeder?

13) Rings um einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt liegen 5 Winkel, deren Größe sich wie 2 : 3 : 5 : 6 : 8 verhält. Wie groß ist jeder?

14) Rings um einen Punkt herum liegen 5 Winkel aneinander, von denen jeder folgende um 3° 30′ größer ist als der vorhergehende; wie groß ist jeder?

§ 3. Die Parallellinien.

Konstruktionsaufgaben.

1) Durch einen gegebenen Punkt C außerhalb einer gegebenen geraden Linie AB die Parallele zu dieser Linie zu ziehen (auf verschiedene Weise).

2) Mechanische Auflösung dieser Aufgabe: a) mit Hilfe eines festliegenden Lineals und eines daran verschiebbaren Winkeldreiecks; b) eines Parallellineals; c) einer Reißschiene.

3) Durch einen außerhalb einer Linie AB gegebenen Punkt C eine Linie so zu ziehen, daß sie mit AB einen gegebenen Winkel a bildet.

Rechenaufgaben.

Mündlich.

1) Zwei gerade Linien AB und CD werden von einer dritten EF so geschnitten, daß ein äußerer ∠ b = 80° (75° 45′, $^4/_5$ R) beträgt

und der dazu gehörige korrespondierende $\angle$ f sich zu seinem Nebenwinkel e oder h wie 3 : 5 (2 : 3; 4 : 5) verhält; wie groß sind die 8 Winkel an den Schnittspunkten?

2) Angenommen, AB sei parallel zu CD und $\angle$ b verhalte sich zu seinem Nebenwinkel wie 2 : 3 (3 : 5; 23 : 41); wie groß sind alsdann die 8 entstehenden Winkel?

3) Zwei Parallelen werden von einer Geraden so geschnitten, daß einer der inneren Winkel 49° 58′ 26″ groß ist; welche Größe haben die übrigen Winkel?

§ 4. Die ebenen Figuren im allgemeinen.

Konstruktionsaufgaben.

1) Aus zwei gegebenen Winkeln a und b eines Dreiecks den dritten Winkel c zu finden.

2) Es ist der eine spitze Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks gegeben; die Größe des andern soll bestimmt werden.

3) Einen gegebenen Winkel ABC durch ursprüngliche Winkelkonstruktion zu halbieren.

4) Das Doppelte eines gegebenen Winkels ABC (ohne Zusammenlegen) durch ursprüngliche Winkelkonstruktion zu finden.

Rechenaufgaben.

Mündlich.

1) Wie viele Diagonalen kann man in einem 4=, 5=, 6= und neck von einer Ecke aus ziehen?

2) Wie viele Diagonalen kann man in einem 4=, 6=, 10=, 250= und neck ziehen?

3) In welchem Vieleck kann man von einem Ecke aus c Diagonalen, im ganzen 35, 54, 65, 405 Diagonalen ziehen?

4) In einem Dreieck sind zwei Winkel a = 39° 45′ 56″ und b = 79° 57′ 15″; wie groß ist der dritte Winkel?

5) Zwischen den drei Winkeln a, b und c eines Dreiecks finden folgende Beziehungen statt $a + b - c = 64°$; $a - b + c = 132°$; wie groß ist jeder derselben?

6) Der eine Winkel eines Dreiecks beträgt 43° und die Differenz der beiden andern ist 7°; wie groß ist jeder derselben?

7) Die Winkel eines Dreiecks verhalten sich wie 3 : 4 : 5; wie groß sind dieselben?

8) Von den drei Winkeln eines Dreiecks sei der zweite um 6° 15′ größer als der erste, der dritte um 4° 15′ größer als der zweite; wie groß ist jeder?

9) Die Summe zweier Winkel eines Dreiecks betrage das $2^3/_4$=fache des dritten; wie groß ist dieser und jene Summe?

10) Der Außenwinkel eines Dreiecks beträgt 147°; die beiden inneren gegenüberliegenden Winkel verhalten sich zu einander wie 3 : 4; wie groß sind die Dreieckswinkel?

11) Ein Außenwinkel eines Dreiecks betrage mit dem einen der ihm nicht anliegenden inneren Winkel zusammen 109°, mit dem andern 116°. **a)** Wie groß ist der Außenwinkel; **b)** wie groß sind die Dreieckswinkel?

12) Ein Winkel eines Dreiecks ist 90° 40′, und die Differenz der beiden ihm nicht anliegenden Außenwinkel beträgt 26° 38′; wie groß sind die anderen inneren Winkel?

13) In einem gleichschenkligen Dreieck ist der Winkel an der Spitze 62° 25′ 49″; wie groß ist jeder der beiden Winkel an der Grundlinie?

14) Ein Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 48° 45′ 50″; wie groß sind die beiden andern Winkel?

15) In einem gleichschenkligen Dreieck sei der Winkel an der Spitze sechsmal so groß als jeder Winkel an der Basis; wie groß ist er?

16) In einem gleichschenkligen Dreieck verhält sich ein Winkel an der Basis zu dem Winkel an der Spitze wie $4^1/_2$: 7; wie groß ist jeder Winkel?

17) In einem gleichschenkligen Dreieck ist der Außenwinkel an der Spitze 125° 32′ 36″; wie groß sind die Winkel desselben?

18) Dem Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks liegt ein Außenwinkel von 126° 24′ 36″ gegenüber; wie groß sind die drei Winkel des Dreiecks?

19) Die Summe der zwei an einem Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks liegenden Winkel beträgt 138° 24′ 48″; wie groß sind die Winkel desselben?

20) In einem gleichschenkligen Dreieck beträgt die Differenz zwischen den zwei ungleichen Winkeln 57°; wie groß sind die Winkel?

21) Die Winkel eines Vierecks verhalten sich wie 7 : 4 : 3 : 2; wie groß ist jeder Winkel?

22) Wie groß ist jeder Winkel im regelmäßigen Drei-, Vier-, Fünf-, Sechs-, Acht-, Zehn-, Vierundzwanzig- und Sechsunddreißigeck?

23) In einem regelmäßigen Polygon ist die Größe eines Winkels = a°; wie viele Seiten hat dasselbe?

24) In welchem regelmäßigen Polygon hat jeder Winkel a) 135°, b) 156°?

25) In welchem Vielecke beträgt die Winkelsumme a°, 1080° 5400°?

26) In welchem Vielecke beträgt die Winkelsumme n, 2, 10, 16, 18 Rechte?

27) Wie groß ist jeder Außenwinkel an einem regelmäßigen Drei-, Vier-, Fünf-, Sechs-, Zehn-, Zwölf- und Fünfzehneck?

28) In einem rechtwinkligen Dreieck ist der eine Außenwinkel an der Hypotenuse 97° (124° 40'); wie groß ist der zweite Außenwinkel an der Hypotenuse?

29) Der Umfang eines ungleichseitigen Dreiecks ist 4,7 m; die größte Seite ist um 5 dm größer als die mittlere, und um 8 dm größer als die kleinste; wie groß ist jede Seite?

30) Drei Städte A, B und C liegen in einem Dreieck. Von A über B nach C sind 83,8 km, von B über C nach A 102,9 km und von C über A nach B 90,1 km; wie weit sind A, B und C voneinander entfernt?

Schriftlich.

1) In welchem Vieleck kann man im ganzen 7625, c Diagonalen ziehen? (q.)

2) Welches Vieleck hat 777 Diagonalen mehr als Seiten? (q.)

3) Welches Polygon hat 15 mal so viele Diagonalen als Seiten? (q.)

4) In welchem regelmäßigen Polygon beträgt jeder Winkel $14^2/_5$ mal so viel Grade als das Polygon Winkel hat? (q.)

§ 5. Die Kongruenz der geradlinigen Figuren und die hieraus sich ergebenden Eigenschaften derselben.

Konstruktionsaufgaben.

a) Konstruktion von Senkrechten, Teilung von Winkeln.

1) Von einem gegebenen Punkte N in einer gegebenen geraden Linie RS eine Senkrechte auf dieser Linie zu errichten. (Anhang II, A., 1.)

2) Von einem gegebenen Punkte M außerhalb einer gegebenen geraden Linie RS eine Senkrechte auf dieselbe zu fällen.

3) Eine gegebene gerade Linie MN durch eine Senkrechte zu halbieren.

4) Im Endpunkte einer geraden Linie AB eine Senkrechte auf ihr zu errichten.

5) Einen gegebenen Winkel ABC durch eine Halbierungslinie zu halbieren.

6) Einen gegebenen Winkel MNO in 4, 8, 16, 32 gleiche Teile zu teilen.

7) Einen Winkel von 60°, 30°, 15°, 45°, 120°, 90°, 45° $22^1/_2$°, $11^1/_4$°, $67^1/_2$° zu konstruieren.

8) Einen gegebenen rechten Winkel ABC in drei gleiche Teile zu teilen (zu trisecieren).

b) Konstruktion von Dreiecken aus gegebenen Stücken.

aa) Ohne eigentliche Analyse zu lösen.

1) Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten M = 72 mm und N = 37 mm und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel p = 30°.

2) Ein Dreieck zu konstruieren aus einer gegebenen Seite M = 9 cm und den beiden anliegenden Winkeln o = 45° und p = 60°.

3) Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite M, einem anliegenden Winkel p und dem gegenüberliegenden Winkel r.

4) Ein Dreieck aus den drei gegebenen Seiten M = 6 cm, N = 7 cm und O = 8 cm zu konstruieren.

5) Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten M = 8 cm und N = 9 cm und dem der Seite N gegenüberliegenden Winkel p = 60°.

6) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von welchem gegeben sind:

a) die beiden Katheten M = 5,2 cm und N = 6,5 cm;
b) eine Kathete M und der anliegende spitze Winkel p;
c) eine Kathete M und der gegenüberliegende spitze Winkel p;
d) die Hypotenuse H und ein spitzer Winkel p;
e) eine Kathete K und die Hypotenuse H.

7) Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, von welchem gegeben sind:

a) die Basis M = 6 cm und der Schenkel N = 9 cm;
b) die Basis M und ein Winkel p an derselben;
c) die Basis M und der Winkel p an der Spitze;
d) die Basis M und die Höhe H;
e) die Höhe H und ein Schenkel S;
f) die Höhe H und der Winkel p an der Spitze;
g) die Höhe H und ein Winkel p an der Grundlinie.

8) Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von welchem gegeben sind:

a) die Hypotenuse H = 72 mm;
b) die zur Hypotenuse gehörige Höhe H.

9) Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, von welchem gegeben sind:

a) die Seite M = 6 cm
b) die Höhe H.

bb) **Mit Hilfe der geometrischen Analyse zu lösen.**

1) Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem die folgenden Stücke gegeben sind:

a) die Grundlinie M = 82 mm, ein Winkel p = 42° an derselben und die Summe S = 105 mm der beiden andern Seiten (Anhang II, 2);
b) die Summe aller drei Seiten S und zwei Winkel m und n (Anhang II, 3);
c) die beiden Winkel m und n an der Grundlinie und die Summe S der beiden gegenüberliegenden Seiten;
d) die beiden Winkel m und n an der Grundlinie und die Differenz U der beiden gegenüberliegenden Seiten;

e) die Grundlinie M, die Differenz der beiden andern Seiten U und ein Winkel p an der Grundlinie, der 1) an der größeren der beiden Seiten, 2) an der kleineren Seite liegt;
f) die Grundlinie M. die Summe der beiden andern Seiten S und der von diesen beiden Seiten eingeschlossene Winkel p;
g) die Grundlinie M, die Differenz U der beiden andern Seiten und der von diesen beiden Seiten eingeschlossene Winkel p;
h) die Höhe H, eine Seite M und der Winkel an der Spitze p;
i) der Unterschied u der Winkel an der Grundlinie und zwei Seiten M und N;
k) der Unterschied U der Segmente*) und die beiden Winkel p und q an der Grundlinie.

2) Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, von welchem gegeben sind:
a) die Summe S von Seite und Höhe;
b) die Differenz U zwischen der Seite und Höhe.

3) Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, von welchem gegeben sind:
a) der Umfang M und die Höhe H;
b) die Summe S einer Seite und der Höhe und ein Winkel p an der Grundlinie.
c) die Basis M und der Unterschied U des Schenkels und der Höhe.

4) Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von welchem der Umfang U gegeben ist.

5) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von welchem gegeben sind:
a) eine Kathete K und die Summe S der Hypotenuse und der andern Kathete;
b) die Hypotenuse H und die Summe S der beiden Katheten;
c) die Hypotenuse H und die Differenz D der beiden Katheten;
d) die Summe S der Hypotenuse und einer Kathete und ein spitzer Winkel p.

---

*) Segmente nennt man die Abschnitte, in welche die Grundlinie durch die Höhe geteilt wird.

§ 6. Die Eigenschaften der Vierecke, welche sich aus den vorhergehenden Sätzen ergeben.

Konstruktionsaufgaben.

1) Ein Quadrat zu konstruieren, von welchem die folgenden Stücke gegeben sind:

a) die Seite M;
b) die Diagonale AB;
c) die Summe S der Diagonale und Seite;
d) die Differenz U der Diagonale und Seite.

2) Ein Rechteck zu konstruieren, von welchem die folgenden Stücke gegeben sind:

a) zwei angrenzende Seiten M und N;
b) eine Seite M und die Diagonale N;
c) die Diagonale N und die Summe S der zwei darüber liegenden Seiten.

3) Eine Raute zu konstruieren, von welcher man die folgenden Stücke kennt:

a) die Seite M und einen Winkel a;
b) die Seite M und eine Diagonale N;
c) die beiden Diagonalen N und P;
d) eine Diagonale N und den gegenüberliegenden Winkel m.

4) Ein Rhomboid zu konstruieren, von welchem die folgenden Stücke gegeben sind:

a) zwei Seiten M und N und der von ihnen eingeschlossene Winkel p;
b) die beiden Diagonalen M und N und eine Seite S;
c) die beiden Diagonalen M und N und der Winkel p, unter welchem diese einander schneiden.

5) Ein Trapez zu konstruieren, von welchem man die folgenden Stücke kennt:

a) eine Diagonale M, die beiden nicht parallelen Seiten N und P und eine der parallelen Seiten S;
b) eine Diagonale M, die beiden parallelen Seiten N und P und eine der nicht parallelen Seiten S;
c) die vier Seiten M, N, R und S.

6) Ein Viereck zu konstruieren, von welchem 3 Seiten M, N und S und die beiden an der 4. Seite gelegenen Winkel p und q gegeben sind.

7) Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, von welchem ein Schenkel S und die zugehörige Höhe H gegeben sind.

8) Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem die folgenden Stücke gegeben sind:

a) der Winkel p an der Spitze und die aus den Endpunkten der Grundlinie auf die Seiten gefällten Lote M und N;

b) zwei Seiten M und N und die Mittellinie P.

9) Zwischen den Schenkeln eines Winkels BAC ist ein Punkt P gegeben; es soll durch diesen eine Gerade so gezogen werden, daß das zwischen die Winkelschenkel fallende Stück MN derselben durch den gegebenen Punkt halbiert wird.

10) Zwischen den Schenkeln eines Winkels BAC soll eine Linie von der Länge M so gezogen werden, daß ihre Endpunkte auf die Schenkel des Winkels fallen und dieselbe mit dem einen Schenkel AC den gegebenen Winkel a bildet.

Rechenaufgaben.

Mündlich.

1) Wie groß sind die Winkel eines Vierecks, in dem 3 Winkel gleich sind und jeder von diesen dreimal so groß ist als der vierte?

2) In einem Parallelogramm ist ein Winkel **a)** 85°, **b)** 103° 24′ 48″; wie groß ist jeder der drei anderen Winkel?

3) In einem Rhomboid beträgt die Differenz zweier benachbarter Winkel 36° (30°); wie groß sind die einzelnen Winkel?

4) In einer Raute verhält sich die Größe zweier benachbarter Winkel wie 1 : 3 (5 : 7; 3 : 7); wie groß sind die einzelnen Winkel derselben?

5) Es wird die kleinere Diagonale einer Raute gezogen; von welcher Beschaffenheit sind die beiden dadurch entstehenden Dreiecke, wenn ein Winkel der Raute 60° beträgt?

6) In einem Rhombus mißt ein Winkel 45°; was für ein Dreieck entsteht, wenn man von einer Ecke aus auf die gegenüberliegende Seite ein Perpendikel fällt?

7) Die Länge zweier benachbarter Seiten eines Rhomboids beträgt $25^1/_2$ m (38,75 m; 68,25 m), und die eine Seite ist um $12^1/_2$ % ($6^2/_3$ %; $16^2/_3$ %) der anderen Seite länger als diese. Wie lang sind die vier Seiten des Rhomboids?

§ 7. Flächeninhalt der geradlinigen Figuren.

Konstruktionsaufgaben.

1) Ein Quadratdecimeter soll in Quadratcentimeter zerlegt werden.

2) Ein Rechteck, dessen Seiten 5 cm und 4 cm betragen, soll in Quadratcentimeter zerlegt werden.

3) Ein gegebenes Parallelogramm ABCD soll in ein Rechteck über derselben Grundlinie verwandelt*) werden.

4) Es soll ein gegebenes Dreieck ABC **a)** in ein Parallelogramm, **b)** in ein Rechteck verwandelt werden.

5) Ein gegebenes Trapez ABCD soll **a)** in ein Parallelogramm, **b)** in ein Rechteck verwandelt werden.

6) Man soll **a)** ein gegebenes Trapez, **b)** ein gegebenes Parallelogramm in ein Dreieck verwandeln.

7) Ein ungleichseitiges Dreieck ABC in ein gleichschenkliges von derselben Grundlinie und Höhe zu verwandeln.

8) Ein Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, das dieselbe Grundlinie und an derselben einen Winkel p von vorgeschriebener Größe hat.

9) Ein gegebenes Dreieck ABC in ein rechtwinkliges zu verwandeln.

10) Ein Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, welches dieselbe Grundlinie und eine gegebene Linie M zur Seite hat.

11) Ein gegebenes Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, so daß ein Winkel an der Grundlinie unverändert bleibt und die Grundlinie einer gegebenen Linie M gleich wird.

12) Ein gegebenes Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, so daß ein Winkel an der Grundlinie unverändert bleibt und die Höhe einer gegebenen Linie H gleich wird.

13) Ein gegebenes Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, dessen Grundlinie die Richtung der Grundlinie des gegebenen Dreiecks beibehält, dessen Spitze dagegen fällt: **a)** auf eine Seite, **b)** innerhalb und **c)** außerhalb des gegebenen Dreiecks.

14) Ein gegebenes Viereck ABCD in ein Dreieck zu verwandeln.

---

*) Eine Figur verwandeln heißt, eine andere von gleichem Flächeninhalte und vorgeschriebener Gestalt konstruieren.

15) Ein gegebenes Parallelogramm ABCD in ein anderes a) mit gegebenem Winkel m, b) mit gegebener Seite n zu verwandeln.

16) Über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten 3 cm und 4 cm betragen, sollen Quadrate konstruiert und dieselben in Quadratcentimeter zerlegt werden*).

17) Ein Quadrat zu konstruieren, welches so groß ist als a) die Summe, b) die Differenz zweier gegebener Quadrate.

18) Ein Quadrat zu zeichnen, welches a) doppelt so groß; b) drei-, vier- und fünfmal so groß, c) halb so groß als ein gegebenes Quadrat ist.

19) Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

20) Ein gegebenes Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln.

21) Ein Dreieck ABC von dem Winkelpunkte C aus in drei gleiche Teile zu teilen.

22) Ein Dreieck ABC von einem in einer Seite liegenden Punkte D aus in zwei gleiche Teile zu teilen (Anhang II).

23) Ein Parallelogramm durch Gerade, welche einer Seite parallel sind, in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu teilen.

24) Ein Parallelogramm ABCD von einem in einer Seite liegenden Punkte E aus in drei gleiche Teile zu teilen.

25) Ein Viereck ABCD von einem Eckpunkte C aus in zwei gleiche Teile zu teilen.

---

*) Der Satz, den diese Konstruktion ganz elementar und anschaulich beweist, wird nach seinem Entdecker Pythagoras der Pythagoreische oder Pythagōrische Lehrsatz genannt. Seiner hohen Wichtigkeit wegen hat er den Ehrennamen magister matheseōs (eig. der Meister der Mathematik, der Meistersatz des Pythagoras) erhalten. Bezeichnet man die beiden Katheten mit a und b und die Hypotenuse mit c, so ist:

$$c^2 = a^2 + b^2,\ c = \sqrt{a^2 + b^2};$$
$$a^2 = c^2 - b^2,\ a = \sqrt{c^2 - b^2};$$
$$b^2 = c^2 - a^2,\ b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Man spreche diese Gleichungen mit Worten aus. Pythagoras aus Samos war ein bedeutender griechischer Philosoph, lebte von 580—500 v. Chr. und gründete einen auf Tugendübung abzielenden Bund zu Kroton in Unteritalien, die Pythagoreer. Der Sage nach soll er aus Freude über die Entdeckung seines Satzes den Göttern eine Hekatombe (Opfer von 100 Tieren, bes. Rindern) dargebracht haben.

26) Ein Trapez ABCD von einem Eckpunkte E aus in zwei gleiche Teile zu teilen.

27) Ein Trapez ABCD von einem in einer der Parallelseiten liegenden Punkte P aus in zwei gleiche Teile zu teilen.

Rechenaufgaben.

I. Rechteck.

Mündlich.

1) Die Grundlinie eines Rechteckes beträgt 12 m (18 m; 5,6 m; 8,75 m) und die Höhe 15 m (24 m; 6,2 m; 4,25); welchen Umfang hat dasselbe?

2) Die Grundlinie eines Rechteckes mißt 85 m (128 m; 156 m; 34,5 m) und verhält sich zu seiner Höhe wie 17 : 15 (16 : 9; 26 : 29; 23 : 10); wie groß ist jedesmal die Höhe und der Umfang des Rechteckes?

3) Der Umfang eines Rechteckes beträgt 230 m (650 m) und Grundlinie und Höhe desselben verhalten sich wie 15 : 8 (2 : 3); wie lang sind diese?

4) Welchen Inhalt hat ein Rechteck, dessen Grundlinie 13 m (24,5; 6,8 m) lang ist und dessen Höhe 9 m (15 m; 2,5 m) mißt?

5) Die zusammentreffenden Seiten eines Rechteckes sind 3,5 m und 2,7 m; wie groß ist der Inhalt desselben?

6) Der Inhalt eines Rechteckes beträgt 156 qm (204,8 qm; 130,2 qm) und seine Grundlinie 13 m (8 m; 12,4 m); wie groß ist die Höhe desselben?

7) Der Inhalt eines Rechteckes beträgt 375 qm (768 qm; 24,3 a), Grundlinie und Höhe desselben verhalten sich wie 3 : 5 (4 : 3; 6 : 5); welche Größe haben diese?

8) Ein Rechteck ist 9 m (12 m; 2,4 m) hoch und 12 m (16 m; 3,2 m) lang. Welche Länge hat seine Diagonale?

9) Die Breite eines Rechteckes mißt 15 m (24 m; 12 m) und die Diagonale desselben 25 m (25 m; 13 m); wie groß ist seine Länge?

10) Der Fußboden eines rechteckigen Zimmers von 24 m Länge und 12 m Breite soll belegt werden; wie viele Bretter von 6 m Länge und 0,5 m Breite sind dazu erforderlich?

11) Acht Arbeiter mähen in einer bestimmten Zeit eine Wiese ab, die 400 m lang und 200 m breit ist; wie viele Arbeiter sind erforderlich, um in der nämlichen Zeit eine zweite Wiese abzumähen, die 500 m lang und 120 m breit ist?

12) Ein Rechteck, dessen eine Seite 28 m lang ist, hat gleichen Flächeninhalt mit einem zweiten Rechteck, dessen beide Seiten die Länge von 56 m und 35 m haben; welche Ausdehnung hat die zweite Seite jenes Rechteckes?

13) Ein Rechteck, dessen Länge 75 m und dessen Breite 63 m beträgt, hat mit einem andern, dessen Länge sich zur Breite wie 7 : 3 verhält, gleichen Inhalt. Wie groß ist die Länge und Breite des letzteren?

14) Jemand kann für eine Wiese, die 120 m lang und 25 m breit ist, 800 ℳ bekommen und diese Summe zu $4^1/_2$ % ausleihen. Durchschnittlich erntet er vom Ar $^5/_6$ Ctr. Heu und kann den Ctr. zu 1,60 ℳ verkaufen. Gewinnt oder verliert er, wenn er die Wiese verkauft und wieviel jährlich?

15) Von einem rechteckigen Garten, der 36 m lang und 24 m breit ist, wird durch eine Teilungslinie, die über die ganze Breite geht, ein rechteckiges Stück abgeschnitten und für 144 ℳ, das a zu 40 ℳ gerechnet, verkauft. Wie groß ist der Rest des Gartens?

16) Ein Acker, der 3,6 ha Fläche hat, 120 m breit ist und mit seiner langen Seite an eine Straße grenzt, soll unter 4 Personen so verteilt werden, daß sich die Teile wie 3 : 4 : 2 : 6 zu einander verhalten und, daß jeder Anteil seiner vollen Breite nach an die Straße angrenzt. Wie breit und lang ist jeder Teil?

17) Die Länge eines rechteckigen Grundstücks verhält sich zur Breite wie 9 : 8. Der 5te Teil desselben ist zu einem Obstgarten und der Rest, welcher 230,4 a beträgt, zu einem Weinberge verwendet. Wie lang und breit ist dieses Grundstück?

18) Ein Rasenplatz ist 168 m lang und 50 m breit. Wieviel m Leinwand von 0,80 m Breite lassen sich darauf bleichen, wenn 25 % der Fläche für die zwischen den Bleichstücken befindlichen Gänge in Abrechnung kommen?

19) Der Fußboden eines Zimmers ist 54 qm, die eine Seitenwand 36 qm und die daran stoßende Wand 24 qm groß. Wie lang, breit und hoch ist dieses Zimmer?

20) Ein Garten ist 80 m lang und 60 m breit; die Breite desselben vermindert man um 20 m; um wieviel muß man die Länge vermehren, damit sich der Inhalt gleich bleibt; wie groß ist die Differenz im Umfang beider Figuren?

Schriftlich.

1) a) Von einem Rechtecke beträgt die Grundlinie 492,326 m, die Höhe 212,658 m; wie groß ist die Fläche desselben? — b) Ein rechteckiges Feld ist 265,3 m lang und hat 49743,75 qm Inhalt; wie groß ist die Breite desselben?

2) Ein Dach ist 9,95 m lang und 4,2 m breit; wieviel qm Zinkblech braucht man zur Bedeckung desselben, wenn für das Falzen noch 8 % mehr gerechnet werden?

3) Ein rechteckiger Garten von 35 m Länge und 24 m Breite ist durch zwei rechtwinklige Wege, durch den einen nach der Länge, durch den andern nach der Breite, in der Mitte durchschnitten; außerdem führen ringsherum am Zaune solche Wege. Die ersteren sind 1 m, die letzteren 1,2 m breit. Am Ende des Gartens, in der Mitte der längeren Seite, befindet sich ein 3 m breites und 5 m tiefes Gartenhäuschen, um welches ebenfalls Wege herumgehen, welche dieselbe Breite, wie die längs des Zaunes haben. Wie groß ist die angebaute Gartenfläche?

4) Ein Zimmer, das 10,4 m lang, 6,2 m breit und 2,64 m hoch ist, soll tapeziert werden; wie viele Stück Tapeten von 7,6 m Länge und 0,45 m Breite sind hiezu erforderlich, wenn das Zimmer 5 Fenster, wovon jedes 1,8 m hoch und 0,85 m breit ist, sowie eine Thüre von 2,05 m Höhe und 0,95 m Breite hat, und die Wände mit einer Brustlambris von 0,85 m resp. 0,84 m Höhe versehen sind?

5) Die Diagonale eines Rechtecks von 194 m Umfang mißt 85 m; wie groß ist der Inhalt desselben? (q.)

6) Ein Brett, das eine Länge von 5,8 m und eine Breite von 3,6 m hat, wird in der Mitte abgesägt; welchen Umfang bekommt es jetzt, wenn die beiden Teile an ihren kürzeren Seiten zusammen geleimt werden? Welchen Umfang hatte es ursprünglich?

7) Am Umfange eines rechtwinkligen Gartens stehen Bäume, je 3,8 m voneinander entfernt, und zwar steht je an einer Ecke des Gartens ein Baum, und die Bäume sind 1,2 m vom Gartenzaun entfernt; wie groß ist der Umfang des Gartenzaunes, wenn auf jeder Längenseite des Gartens 48 Bäume, auf jeder Breitenseite 36 Bäume stehen (die Eckbäume jedesmal mitgerechnet)?

8) Der Flächeninhalt eines Ackers, der die Form eines Rechteckes hat, beträgt 2 ha 94a 40 qm. Wie groß ist die Länge und Breite desselben, wenn erstere 24 m größer ist als letztere? (q.)

9) Der Fußboden eines Zimmers beträgt 172,02 qm, die eine Seitenwand 91,5 qm und die daran stoßende Wand 47 qm. Wie lang, breit und hoch ist dieses Zimmer? (q.)

10) Die Grundlinie eines Rechteckes beträgt 224 m und die Höhe 207 m; wie lang ist seine Diagonale?

11) Ein viereckiger, rechtwinkliger Garten soll in 6 gleiche Teile geteilt werden. Der Umfang eines jeden Teiles beträgt 220 m, wenn man einem solchen zur Länge den dritten Teil der Länge und zur Breite die Hälfte der Breite des ganzen Gartens gibt; dagegen beträgt der Umfang eines jeden Teiles 230 m, wenn man zur Länge die Hälfte der Länge und zur Breite den dritten Teil der Breite des Gartens nimmt. Wie lang und breit ist der zu teilende Garten?

12) Zwei rechtwinklige Höfe, von denen der erste noch einmal so lang als breit, der zweite dreimal so lang als breit und der zweite um 18 m länger ist als der erste, werden mit Steinplatten belegt, deren jede 1 m lang und $^1/_2$ m breit ist. Die Zahl der hiezu erforderlichen Steinplatten beträgt 4164. Wie groß ist die Länge und Breite eines jeden Hofes? (q.)

13) Ein rechtwinkliger Hof ist ringsum durch eine überall gleich hohe Bretterwand eingeschlossen; die Länge des Hofes ist 12 mal so groß als die Höhe der Wand, die Breite desselben um 1 m größer als die fünffache Höhe der Wand, der Flächeninhalt des Hofes aber um 264 qm größer als der Flächeninhalt der Wand; wie groß sind die Ausdehnungen? (q.)

14) Ein Rechteck hat einen Umfang von 224 m; die Diagonale desselben beträgt 80 m; welche Länge und Breite hat dasselbe? (q.)

15) Die Länge eines Rechteckes verhält sich zur Breite wie 15 : 8, seine Diagonale ist 323 m; wie lang und breit ist dasselbe?

16) Die Diagonale eines Rechteckes, dessen Länge 119 m größer ist als die Breite, beträgt 221 m; wie lang und breit ist dasselbe?

17) Eine rechteckige Fläche hat einen Inhalt von 10,92 a; die Diagonale desselben beträgt 85 m; wie lang und breit ist dasselbe? (q.)

18) Der Umfang eines Rechteckes von 20,88 qm Inhalt ist um 13 m größer als die Grundlinie; wie groß sind die Seiten? (q.)

19) Der Inhalt eines Rechteckes beträgt 177,84 qm und der Umfang 54 m; wie groß sind die Seiten? (q.)

20) Ein Rechteck ist 57 m lang und 19 m breit. Vergrößert man die Breite um eine gewisse Anzahl von m und vermindert die Länge um das Dreifache dieser Zahl, so nimmt die Größe dieses Rechteckes um 75 qm ab. Wieviel beträgt die bezeichnete Vergrößerung der Breite und Verkleinerung der Länge?

21) Ein Garten, der die Form eines Rechtecks von 33 m Länge und 22 m Breite hat, soll ringsum eine Vergrößerung in der Weise erhalten, daß das hierauf zu verwendende Stück Land überall gleich breit werde und denselben Inhalt habe, den der Garten anfangs hatte. Welche Breite muß das zur Erweiterung notwendige Stück Land bekommen? (q.)

22) In ein Rechteck, dessen Seiten 40 m und 50 m sind, soll ein zweites eingeschrieben werden, dessen Inhalt gleich $^3/_5$ des ersten ist. Wenn nun die Seiten des kleineren überall gleichen Abstand von denen der größeren haben sollen, so fragt es sich, wie groß dieser Abstand genommen werden muß? (q.)

23) Ein rechteckiger Garten, dessen beide Seiten 23 m und 18 m groß sind, soll durch zwei mit diesen Seiten parallele, also unter rechten Winkeln sich schneidende gerade Linien in 4 rechteckige Teile so zerlegt werden, daß das an der einen Ecke liegende Rechteck 165 qm, das an der entgegengesetzten Ecke liegende 56 qm messe. Wie müssen die Seiten des Gartens geteilt werden? (q.)

24) Jemand kauft ein rechtwinkliges Grundstück, dessen Länge um 12,3 m größer ist als seine Breite, um 2689,6 *M.* Auf demselben wird ein Haus mit Nebengebäude aufgeführt; auf das letztere kommen 25,52 qm. Von der übrig bleibenden Fläche, die 512,4 qm beträgt, verwendet man $^1/_5$ als Hof und legt den Rest als Garten an. Auf den letzteren kommen von der für das ganze Grundstück gezahlten Summe 1639,68 *M.* **a**) Wie groß ist die für das Haus verwendete Fläche? **b**) Wie groß ist der Inhalt des Grundstücks? **c**) Wie lang und breit ist dasselbe? (q.)

25) Ein rechteckiger Platz von 24 m Länge ist von einem überall gleichbreiten Trottoir umgeben. Um diese Fläche von Schnee zu reinigen, waren 2 Stunden 6 Minuten erforderlich, und zwar ver-

hielten sich die zur Reinigung des Platzes und des Trottoirs nötigen Zeiten wie 16 : 5. Wie breit ist das Trottoir, wenn die Arbeiter in 2 Minuten 9 qm reinigten? (q.)

26) Ein Landwirt besäet einen Acker mit Roggen, einen zweiten mit Weizen, einen dritten mit Hafer, und braucht für alle drei Äcker 28,481 hl Saatgut. Die Länge des zweiten Ackers beträgt 25 m mehr als die des ersten, und der dritte Acker ist um 15 m länger als der zweite. Die Breite des ersten, zweiten und dritten Ackers verhält sich wie 5 : 6 : 7, und zwar beträgt die Breite des ersten Ackers $^1/_3$ von der um 5 m vergrößerten Länge des dritten Ackers. Wie groß ist jeder Acker, wenn man für ein Ar 2,8 Liter Roggen, 3 Liter Weizen und 3,5 Liter Hafer als Saatgut braucht und alle drei Äcker rechteckig sind? (q.)

27) Die Summe der Grundlinie und Diagonale eines Rechteckes ist s m und die Höhe desselben b m; welches ist die Grundlinie a und der Inhalt f desselben?

28) Die Summe der Grundlinie und Höhe eines Rechteckes ist s dm und die Diagonale d dm; wie groß sind die Seiten a und b und der Flächeninhalt f desselben?

29) Die Summe der Grundlinie und Höhe eines Rechteckes ist s m und die Fläche f qm; wie groß sind die Seiten a und b desselben?

30) Die Differenz der Grundlinie und Höhe eines Rechteckes ist d m und sein Umfang u m; wie groß sind Länge a, Breite b und Inhalt f desselben?

2. Quadrat.

Mündlich.

1) Die Seite eines Quadrats beträgt 17 m (29 m; 8,4 m; 35,8 m); welchen Umfang hat dasselbe?

2) Der Umfang eines Quadrats mißt 124 m (336 m; 27,6 m; 92,68 m); wie lang ist die Seite desselben?

3) Die Seite eines Quadrats mißt 13 m (29 m; 45 m; 2,5 m; 8,4 m); wie groß ist der Flächeninhalt desselben?

4) Der Inhalt eines Quadrats beträgt 225 qm (289 qm; 196 qm; 5,76 qm; 0,09 qm); wie lang sind die Seiten desselben?

5) Der Umfang eines Quadrats beträgt 72 m (5,2 m; 9,2 m); welchen Inhalt hat dasselbe?

6) Ein quadratischer Spielplatz ist mit einem Seil von 32,40 m Länge umspannt. Wieviel Kinder haben an demselben Platz, wenn jedes Kind 54 cm braucht, und wie groß ist der Spielplatz?

7) Die Seite eines Quadrats mißt 2 m (4 m; 5 m); wie groß ist die Diagonale desselben?

8) Die Diagonale eines Quadrats ist 14,14 m (28,28 m) lang; wie groß ist seine Seite?

9) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrats, dessen Diagonale 18 cm (2,4 m; 4,8 m) mißt?

10) Der Inhalt eines Quadrats beträgt 12,5 qcm (32 qcm; 72 qcm); welche Länge hat die Diagonale desselben?

11) Die Seiten zweier Quadrate sind 5 cm und 12 cm (8 cm und 15 cm; 7 cm und 24 cm) lang. Wie groß ist die Seite eines Quadrats, das so groß als beide zusammen ist? (Summenquadrat.)

12) Die Seiten zweier Quadrate sind 41 cm und 9 cm (37 cm und 35 cm; 61 cm und 11 cm); wie lang ist die Seite des Differenzquadrats?

13) Zwei Seiten zweier Quadrate sind zusammen 14 m (17 m) lang, und das größere Quadrat ist um 56 qm (119 qm) größer als das kleinere; welchen Inhalt hat jedes?

14) Die Seiten zweier Quadrate differieren um 7 m (13 m), und ihre Inhalte um 161 qm (429 qm); welches ist der Inhalt derselben?

15) Wie lang ist die Seite eines Quadrats, das denselben Inhalt hat wie ein Rechteck von 1,8 m Grundlinie und 0,8 m Höhe (3,2 m Grundlinie und 1,8 m Höhe; 7,2 m Grundlinie und 3,2 m Höhe)?

16) Die Summe der Inhalte zweier Quadrate beträgt 2896 qm (6280 qm) und die Differenz derselben 304 qm (448 qm); wie groß sind die Seiten derselben?

17) Die Seiten zweier Quadrate verhalten sich zu einander wie 2 : 3 (3 : 5), und die Summe der Inhalte beider beträgt 832 qm (850 qm). Wie groß sind die Seiten derselben?

18) Die Inhalte zweier Quadrate differieren um 1024 qm, und ihre Seiten verhalten sich zu einander wie 3 : 5; wie lang sind dieselben?

19) Die Inhalte zweier Quadrate verhalten sich wie 9 : 16 und ihre Seiten differieren um 3 m; wie lang sind die letzteren?

20) Wird die Schnur, die ein Quadrat umspannt, um 18 m verlängert, so ist das neue Quadrat, das man dann bilden kann, das $6^1/_4$fache des ersteren. Welche Länge hatte diese Schnur anfangs?

Schriftlich.

1) Aus der Seite a = 4,3 m eines Quadrats soll berechnet werden der Inhalt f, der Umfang u und die Diagonale d desselben.

2) Aus dem Inhalt f = 9,3025 qm eines Quadrats soll man berechnen die Seite a, den Umfang u und die Diagonale d.

3) Der Umfang eines Quadrats ist u = 10.5 m; wie groß ist die Seite a, die Diagonale d und der Inhalt f?

4) Die Diagonale eines Quadrats ist d = 24 m; daraus soll berechnet werden die Seite a, der Umfang u und die Fläche f.

5) Die Summe der Flächen zweier Quadrate ist s = 29,3704 qm und ihre Differenz d = 11,1296 qm; wie groß sind die Seiten x und y dieser Quadrate?

6) Die Summe aus der Diagonale und Seite eines Quadrats ist s = 50 m; wie groß ist die Seite x desselben?

7) Die Differenz der Diagonale und Seite eines Quadrats ist d = 3 m; wie groß ist die Seite x desselben?

8) Die Differenz der Seiten zweier Quadrate ist 1,8 m, die Differenz ihrer Flächen 19,8 qm; wie groß ist die Seite und Fläche eines jeden?

9) Wie groß ist die Seite eines Quadrats, das denselben Inhalt hat, wie ein Rechteck von 12,4 m Grundlinie und 8,6 Höhe?

10) Der Umfang eines Quadrats beträgt 5 m mehr als der eines zweiten Quadrats, dessen Inhalt $^1/_6$ von dem des ersteren ist; wie groß ist der Umfang dieser Quadrate?

11) Wie groß ist die Seite eines Quadrats, dessen Inhalt um das $^9/_{16}$fache größer wird, wenn man die Seite um 8 m verlängert?

12) Verlängert man die eine Seite eines Quadrats um 18 m, so beträgt der Inhalt des Rechteckes, das zur Länge die vergrößerte Seite des Quadrats und zur Breite die Seite des Quadrats hat, 59611,2624 qm. Wie groß ist die Seite des Quadrats? (q.)

13) Für eine Fläche in Form eines Quadrats werden im

ganzen 967,68 ℳ bezahlt; wenn nun auf das Ar 42 ℳ kommen, wieviel m Seitenlänge hat dann das Grundstück?

14) Von einem quadratischen Stück Feld, dessen Seitenlänge 58,4 m beträgt, soll durch eine mit einer Grenzlinie parallele Teilungslinie ein Rechteck abgeschnitten werden, dessen Inhalt 18,98 a beträgt. a) Welche Breite muß das Rechteck erhalten? b) Wie groß ist der Inhalt des übrigen Stückes?

15) In der Ecke eines größeren Quadrats liegt mit der einen Ecke ein kleineres. Die Seite des größeren Quadrats ist 112 m länger als die des kleineren, und der Inhalt des ersteren beträgt 33824 qm mehr als der des letzteren. Wie groß ist jedes der beiden Quadrate?

16) Auf einem Quadrat, dessen Inhalt 148,84 qm beträgt, liegt ein zweites 88,36 qm großes Quadrat, und zwar so, daß die vier Winkelspitzen des letzteren auf den vier Seiten des ersteren sich befinden; wie werden die Seiten des ersteren durch die Winkelspitzen des letzteren geteilt? (q.)

3. Dreiecke im allgemeinen.

Mündlich.

1) Die Grundlinie eines Dreieckes mißt 9 m (13 m; 18,5 m; 25,4 m), die Höhe 6 m (9 m; 12 m; 20,6 m); wie groß ist der Inhalt desselben?

2) Der Inhalt eines Dreieckes beträgt 90 qm (152 qm; 219,6 qm; 288,8 qm), die Höhe 12 m (16 m; 18 m; 19 m); welches ist die Grundlinie dieses Dreieckes?

3) Wie groß ist die Höhe eines Dreieckes, wenn der Inhalt 112 qm (198 qm; 266,5 qm; 102,5 qm), die Grundlinie 16 m (22 m; 26 m; 16,4 m) beträgt?

4) Die Giebelseite eines Gebäudes besteht aus einem Rechteck von 15,6 m Breite und 12 m Höhe und einem darauf ruhenden Dreieck von gleicher Breite und 6 m Höhe; wie hoch kommt der Kalkbewurf derselben, wenn das qm zu 1,6 ℳ berechnet wird?

5) Gegen ein rechteckiges, 17 m langes und 10,75 m breites Stück Gartenland soll ein dreieckiges, 21,5 m langes Stück von gleicher Güte vertauscht werden. Wie hoch muß letzteres sein?

6) In einem Dreieck, dessen Inhalt 360 qm beträgt, verhält sich die Grundlinie zur Höhe wie 4 : 5; wie groß sind beide?

Schriftlich.

1) Die Grundlinie eines Dreieckes beträgt 42,6 m und die Höhe 60,4 m; wie groß ist der Inhalt desselben?

2) Eine Höhe eines Dreieckes mißt 16,4 m; wie groß ist die zugehörige Seite, wenn der Inhalt dieses Dreieckes 104,96 qm beträgt?

3) Die Grundlinie eines Dreieckes verhält sich zur Höhe wie 3 : 4; wie groß sind beide, wenn der Inhalt desselben 174,96 qm beträgt?

4) Der Inhalt eines Dreieckes beträgt 52,92 qm, und eine Höhe desselben ist um 4,2 m größer als die zugehörige Grundlinie; wie groß sind beide? (q.)

4. Rechtwinkliges Dreieck.

Mündlich.

1) Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind 3 m und 4 m*) (6 m und 8 m; 15 m und 20 m; 12 m und 35 m; 0,5 m und 1,2 m) lang; wie groß ist die Hypotenuse?

---

*) Rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten in rationalen ganzen Zahlen auszudrücken sind, nennt man Pythagoreische Dreiecke. Solche sind 3, 4, 5; dann 5, 12, 13; ferner 8, 15, 17 u. s. w. Dreiecke dieser Beschaffenheit nach einer allgemeinen Regel aufzustellen, hat schon seit den ältesten Zeiten die Mathematiker beschäftigt. Diese Aufgabe läuft offenbar darauf hinaus, drei ganze Zahlen so zu bestimmen, daß die Summe der Quadrate zweier Zahlen dem Quadrate der dritten gleich ist. Von den vielen Regeln zur Bestimmung solcher Zahlen lautet die jetzt gewöhnlich angegebene und gebrauchte, in Zeichen ausgedrückte: die eine Kathete $n^2 - m^2$, die andere Kathete $2mn$ und die Hypotenuse $n^2 + m^2$, wo sowohl für n als auch für m jede ganze Zahl gesetzt werden kann (nur $n > m$ und zur Vermeidung wiederkehrender Auflösung zu beschränken auf n prim gegen m). Ist z. B. $n = 2$ und $m = 1$, so hat man: $n^2 - m^2 = 3$; $2mn = 4$ und $n^2 + m^2 = 5$. Daß man auf die angegebene Weise solche Zahlen erhält, hat seinen Grund darin, daß $(n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 = (n^2 + m^2)^2$ ist.

Die kleinsten Zahlen für die Seiten eines Pythagoreischen Dreiecks, die man auf die angegebene Weise findet, sind die Zahlen 3, 4 und 5 (das ägyptische Dreieck). Daß ein Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5 ein rechtwinkliges sei, war schon in den ältesten Zeiten bekannt. Von besonderer Bedeutung ist dieses Dreieck deshalb, weil es uns ein Mittel zur Erklärung der Thatsache gibt, warum die Pythagoreer Mathematik und Musik in nahen Zusammenhang brachten. Schreitet man nämlich von einem Grundtone aus um 4 (oder drei) halbe Töne und von

2) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mißt 13 m (17 m; 25 m; 4,1 m), die eine Kathete 5 m (8 m; 24 m; 0,9 m); wie groß ist die andere Kathete?

3) Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind 8,4 m und 13 m lang; wie groß ist der Inhalt desselben?

4) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist 2,5 m lang, eine Kathete 2,4 m; wie groß ist der Inhalt desselben?

5) Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreieckes beträgt 60 qm, die eine Kathete ist 8 m lang; wie groß ist die Hypotenuse?

6) Zwei Balken von 2,5 m und 6 m Länge werden rechtwinklig aneinander gefügt; wie weit sind ihre Enden voneinander entfernt?

7) Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes verhalten sich wie 3 : 4 und die Hypotenuse desselben mißt 45 m; wie groß ist sein Inhalt?

Schriftlich.

1) Die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind 246,2 m und 158,4 m lang; wie groß ist der Inhalt desselben?

2) Die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind 24 m und 143 m lang; wie groß ist die Hypotenuse?

3) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse 9,75 m, die eine Kathete 8,6 m lang; wie groß ist die andere?

4) Eine 18,8 m lange Leiter, die an die Wand eines Hauses gelehnt ist, steht unten 3,4 m ab. Wie weit ist die oberste Sprosse derselben vom Boden entfernt?

5) Ein Garten von der Form eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten 17,1 m und 14 m messen, soll umzäunt werden; wie viele m lang wird der Zaun?

6) Zwei Wanderer gehen zu gleicher Zeit von demselben Orte aus, der eine nach O, der andere nach N. Der eine legt täglich 4, der andere $4^1/_5$ Meilen zurück. Nach wieviel Tagen werden beide 29 Meilen voneinander entfernt sein?

7) „Köln, Aachen und Düsseldorf liegen in einem nahezu rechtwinkligen Dreieck, so daß Köln an der Spitze des rechten Winkels

da aus um 3 (oder 4) halbe Töne und schließlich von letzterem Tone aus um 5 halbe Töne aufwärts und verbindet die bezeichneten Töne und läßt sie zusammenklingen, so erhält man einen Dur- (oder Moll-) Akkord.

sich befindet. Die Entfernung von Aachen nach Düsseldorf verhält sich zu der Entfernung von Aachen nach Köln wie 19 : 17, und die Entfernung von Köln nach Düsseldorf beträgt $4^1/_4$ Meilen. Wie weit ist Aachen von Köln und von Düsseldorf entfernt?"

8) In einem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete das $2^2/_5$fache der andern ist, beträgt die Hypotenuse 520 m; wie groß ist jede Kathete?

9) Der Umfang eines rechtwinkligen Dreieckes beträgt 48 m und die Hypotenuse ist 20 m lang; wie groß sind die beiden Katheten und der Inhalt? (q.)

10) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mißt 27,7 m; die beiden Katheten differieren um 13,7 m; wie groß sind diese? (q.)

11) Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreieckes beträgt 78,54 qm und die Hypotenuse ist 20,5 m lang; wie groß sind die beiden Katheten? (q.)

12) Die Höhe des Großglockner beträgt h = 3796 m (= 0,5116 eine Meilen, eine Meile = 7420 m). Wie groß ist die Aussichtsweite (d. h. der Radius des Gesichtskreises) auf dem Gipfel desselben, wenn man den Halbmesser der Erde zu R = 858,5 d. M. annimmt?

13) „Das Leuchtfeuer auf der Insel Helgoland befindet sich in einer Höhe von 81,6 m über der Meeresfläche. Aus welcher Entfernung kann das Auge eines Beobachters auf einem diesem Ort zusteuernden Schiffe das Leuchtfeuer erblicken, wenn man die Seehöhe des Auges zu 4 m annimmt?" *).

14) Jemand stellte eine Stange senkrecht in einen See und fand, daß sie um 0,9 m über die Oberfläche des Wassers hervorragte. Ohne das untere Ende derselben zu verrücken, neigte er sie so lange, bis das obere Ende gerade in die Wasserfläche fiel, was in einer Entfernung von 3,3 m vom früheren Ort der Stange geschah. Wie läßt sich aus diesen Angaben die Tiefe des Sees berechnen und wieviel beträgt dieselbe?

15) In einer alten chinesischen Arithmetik, Kiu tschang benannt, welche 2600 v. Chr. verfaßt und um 1250 n. Chr. von Tsin Kiu Tshaou herausgegeben sein soll, kommen folgende zwei Beispiele vor: 1) Im Mittelpunkt eines quadratischen Teiches von

*) Man vergleiche Dr. Hann, allgemeine Erdkunde.

10 Fuß Länge und Breite wächst ein Schilf, das sich einen Fuß hoch über dem Wasser erhebt. Als man dasselbe an das Ufer, nach der Mitte einer Seite zog, reichte es nur bis an den Rand des Teiches. Welche Tiefe hat das Wasser? 2) Ein 10 Fuß hoher Bambus ist nach oben hin gebrochen. Berührt nun beim Umbiegen die Spitze des Rohres den Boden, so ist sie 3 Fuß vom untersten Ende des Bambus entfernt. In welcher Höhe befindet sich der Bruch? (Heis.)

16) Eine 48 m hohe Tanne wurde durch einen Sturm an einer Stelle so gebrochen, daß die Teile noch zusammenhingen und die gesenkte Spitze in 24 m Entfernung vom Stamme den Boden berührte. In welcher Höhe wurde sie abgebrochen?

5. Gleichseitiges Dreieck.

Mündlich.

1) Die Seite eines gleichseitigen Dreieckes beträgt 8,4 m (28,6 m; 54,9 m); wie groß ist der Umfang desselben?

2) Der Umfang eines gleichseitigen Dreieckes ist 49,2 m (97,8 m; 167,4 m); wie lang ist seine Seite?

3) Die Seite eines gleichseitigen Dreieckes mißt 4 m (6 m; 8 m; a m); wie groß ist dessen Höhe?*)

4) Wie groß ist der Inhalt eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite 4 m (8 m; 20 m; a m) mißt?

Schriftlich.

1) Von einem gleichseitigen Dreieck ist die Höhe h = 5,4 m; wie groß ist die Seite a und der Inhalt f desselben?

2) Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes beträgt f = 17,73568 qm; wie groß ist dessen Seite a und Höhe h?

3) Ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite 64 m lang ist, hat mit einem Quadrat gleichen Inhalt; wie groß ist die Seite des letzteren?

4) Die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes ist um 2 m kleiner als die Seite; wie lang sind beide?

5) Die Summe der Höhe und Seite eines gleichseitigen Dreieckes beträgt s = 16 cm; wie groß ist die Seite a, die Höhe h und der Inhalt f desselben?

---

*) Als $\sqrt{3}$ merke man sich den Wert 1,732.

6) Von einem gleichseitigen Dreieck ist die Differenz einer Seite und der Höhe d = 4 cm; wie groß ist die Seite a, die Höhe h und der Inhalt f desselben?

7) Eine 15,8 m lange Leiter wird in einer Richtung, welche mit dem Erdboden einen Winkel von 30° bildet, an ein Gebäude gelehnt. Wie weit ist die von der Leiter berührte Stelle des Gebäudes vom Erdboden entfernt?

8) Ein Baum ist 30 m hoch. Wie lang ist sein Schatten, wenn die Sonne 30° über dem Horizont steht?

9) Bei einer Sonnenhöhe von 30° wirft ein Turm einen Schatten von 50 m Länge. Wie hoch ist der Turm?

6. Gleichschenkliges Dreieck.

Mündlich.

1) Die Basis eines gleichschenkligen Dreieckes mißt 5,8 m; der Schenkel 4,6 m; welchen Umfang hat dasselbe?

2) Der Umfang eines gleichschenkligen Dreieckes mißt 30,2 m; wie groß sind die einzelnen Seiten desselben, wenn der Schenkel 2,2 m länger ist als die Basis?

3) Die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes mißt 3 m (20 m; b m), der Schenkel 2,5 m (26 m; a m); wie groß ist die Höhe und Fläche desselben?

4) Der Umfang eines gleichschenkligen Dreieckes beträgt 27 m, ein Schenkel ist 7,5 m lang; welchen Inhalt hat dieses Dreieck?

5) Die Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes mißt 10 m (20 m; 6,8 m; 7,2 m; 9,2 m); wie groß ist der Inhalt desselben?

6) Der Inhalt eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes beträgt 3,125 qm; welche Länge haben die drei Seiten?

7) Wie lang ist der Schatten eines 32,8 m hohen Baumes, wenn die Sonne 45° über dem Horizont steht?

Schriftlich.

1) Eine Waldspitze ist von 2 Eisenbahnstationen gleichweit, nämlich von jeder 2196 m entfernt. Wie groß ist die Fläche des durch diese drei Punkte bestimmten Dreieckes, wenn die geradlinige Entfernung der beiden Stationen selbst 4320 m beträgt?

2) Ein Dach ist an der Grundlinie 10,2 m lang, und seine Höhe beträgt 6,8 m. Wie lange müssen die Dachsparren sein?

3) Die Höhe eines gleichschenkligen Dreieckes ist 1,61 m und der Inhalt desselben beträgt 3,864 qm; wie groß ist sein Schenkel?

4) Der Inhalt eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes beträgt 296,7048 qm; wie groß sind die drei Seiten desselben?

5) Die Breite der Giebelseite eines Hauses beträgt 9 m, die Höhe bis zum Dache 6,4 m und die Dachseite oder Sparrenlänge ohne Vorsprung 5,3 m. Diese Fläche soll mit Mörtel beworfen werden. Wie hoch belaufen sich die Ausgaben hiefür, wenn vom Tüncher für Arbeit und Material 0,95 ℳ per Quadratmeter verlangt werden?

6) Die Giebelseite eines Hauses ist 102,09 qm groß. Die Höhe derselben bis zum Dache beträgt 2,2 m mehr als ihre Breite, und die Dachsparren weichen von der lotrechten Richtung um 45° ab. Wie groß ist die Breite dieser Giebelwand und ihre Höhe bis zum Firste? (q.)

7) Ein Körper wird unter einem Winkel von 45° gegen den Horizont emporgeschossen und legt in der ersten Sekunde 348 m zurück. Welche Höhe wird er nach der ersten Sekunde erreicht haben?

8) Ein Körper wird mit einer Geschwindigkeit von 60,5 m unter einem Winkel von 45° emporgeworfen. In welcher Entfernung vom Boden befindet er sich nach $5^1/_2$ Sekunden?

9) Ein Grundstück ist 4800 qm groß und hat die Form eines gleichschenkligen Dreieckes mit 100 m langen Schenkeln. Wie groß ist dessen Umfang?

10) Von einem rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck ist der Umfang u = 7 cm gegeben. Man soll die Seiten desselben berechnen!

7. Ungleichseitiges Dreieck.

Schriftlich.

1) Von einem Dreieck sind die drei Seiten a, b und c gegeben; es soll ein allgemeiner Ausdruck für den Inhalt f desselben entwickelt werden! (Anhang III.)

2) Man entwickle aus der in 1) erhaltenen Formel die Inhaltsformel für das gleichseitige und gleichschenklige Dreieck!

3) Die drei Seiten eines Dreieckes sind 2,5 m, 1,5 m und 2,2 m lang; wie groß ist der Inhalt desselben?

4) Die drei Seiten eines Dreieckes sind 2,4 m, 4,6 m und 3,4 m lang; wie groß sind die zwei Abschnitte, in welche die 4,6 m lange Seite durch die zugehörige Höhe geteilt wird?

5) Die drei Seiten eines Dreieckes sind 582 m, 486 m und 135 m lang; wie groß ist der Inhalt desselben?

6) Die drei Seiten eines Dreieckes sind 30 m, 54 m und 70 m lang. In welche zwei Teile zerfällt dieses Dreieck durch das zur längsten Seite gefällte Höhenperpendikel?

7) Die Seiten eines ungleichseitigen Dreieckes sind 298 m, 280 m und 102 m lang; wie groß ist der Inhalt desselben und welche Länge haben die von den Eckpunkten des Dreieckes auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Lote? Was für ein Dreieck ist es bezüglich der Beschaffenheit der Winkel?

8) Zwei Seiten eines Dreieckes sind 8 m und 12 m lang und schließen einen Winkel von 60° ein. Wie lang ist die dritte Seite?

9) In einem Dreieck haben zwei Seiten eine Länge von 6,5 m und 7,5 m. Wie groß ist die dritte Seite, wenn der der ersteren Seite gegenüberliegende Winkel 60° mißt?

10) Eine Seite eines ungleichseitigen Dreieckes mißt 19 cm, die beiden andern verhalten sich wie 1 : 4,2 und schließen einen Winkel von 60° ein. Wie lang sind diese zwei Seiten?

11) Der Inhalt eines Dreieckes beträgt $f = 360$ qm, die eine Seite ist $a = 25$ m, und die andere $b = 36$ m lang; wie groß ist die dritte Seite?

Mündlich.

Die drei Seiten eines Dreieckes sind 5 m, 4 m und 3 m (15 m; 13 m und 14 m; 29 m, 25 m und 36 m lang); wie groß ist der Inhalt desselben?

8. Rhombus.

Mündlich.

1) Die Seite eines Rhombus mißt 0,8 m (8,6 m; 27,6 m); welchen Umfang hat derselbe?

2) Der Umfang einer Raute beträgt 76,4 m (150,8 m); wie lang ist die Seite derselben?

3) Die Grundlinie eines Rhombus mißt 13 m (2,5 m; 8,4 m), die Höhe 11 m (1,8 m; 7 m); welchen Inhalt hat derselbe?

4) Der Inhalt einer Raute beträgt 121,5 qm und ihre Höhe 9 m; wie groß ist die Seite?

5) Die beiden Diagonalen einer Raute messen 10,6 m und 5,2 m; wie groß ist der Inhalt derselben?

Schriftlich.

1) Die Seite einer Raute mißt $a = 20$ m und die eine Diagonale $d = 30$ m; wie groß ist die andere Diagonale d_1 und die Fläche f?

2) Die Diagonalen einer Raute sind $d = 15$ m und $d_1 = 20$ m lang; wie groß ist die Seite a und Fläche f?

3) Ein Winkel einer Raute beträgt 60° und die Seite derselben ist 4,2 m lang; wie groß ist ihr Flächeninhalt?

4) Die Seite einer Raute mißt 6,5 m und ein Winkel in ihr beträgt 45°; wie groß ist der Inhalt derselben?

5) Die Seite eines Rhombus ist 3,4 m lang; wie groß ist der Inhalt, wenn ein Winkel in demselben: a) 30°, b) 45° und c) 60° beträgt?

6) Die Fläche einer Raute beträgt $f = 120$ qm und die eine Diagonale d derselben mißt 24 m; wie groß ist die andere Diagonale d_1, die Seite a und der Umfang u?

7) Die Höhe einer Raute mißt 48 m und eine Diagonale 80 m; wie groß ist die Seite, der Inhalt und die andere Diagonale derselben?

8) Die Seite einer Raute beträgt $a = 12$ m und ihr Inhalt $f = 60$ qm; wie groß sind die beiden Diagonalen? (q.)

9) Die Summe der beiden Diagonalen eines Rhombus beträgt $s = 14$ m und seine Fläche $f = 24$ qm; wie groß sind die Diagonalen d und d_1? (q.)

10) Die Höhe einer Raute beträgt 36 cm und die kleine Diagonale 45 cm; welchen Inhalt hat sie?

11) Man legt zwei gleichseitige Dreiecke so aneinander, daß sie eine Raute bilden; wieviel mißt die große Diagonale, wenn die kleine 10 cm lang ist?

12) Die eine Diagonale eines Rhombus ist der Seite gleich; wie groß ist die andere Diagonale und wie groß der Inhalt?

13) Zwei gleiche Kräfte von je 50 kg wirken unter einem Winkel von 60° auf einen Punkt; wie groß ist die Resultante?

14) In einer Raute von 4374 qm Inhalt verhalten sich beide Diagonalen wie 3 : 4. Wie groß ist der Umfang der Raute?

9. Rhomboid.

Mündlich.

1) Die eine Seite eines Rhomboids mißt 8,2 m (12,5 m), die andere 6,5 m (14,8 m); wie groß ist der Umfang desselben?

2) Die Grundlinie eines Rhomboids mißt 12,5 m, die Höhe 9,2 m; welchen Inhalt hat dasselbe?

3) Die Grundlinie eines Rhomboids mißt 29 m, die anstoßende Seite 25 m und die Diagonale 36 m; welchen Inhalt hat dasselbe?

4) In einem Rhomboid beträgt die Summe zweier anstoßender Seiten 27 m und ihre Differenz 7 m. Wie groß ist der Inhalt desselben, wenn die größere Diagonale 21 m mißt?

Schriftlich.

1) Die Grundlinie eines Rhomboids mißt 5,48 m und seine Höhe 3,85 m; welchen Inhalt hat dasselbe?

2) Die Seite eines Rhomboids ist um 8,3 m größer als die zugehörige Höhe; wie lang ist die erstere, wenn der Inhalt des Rhomboids 786,50 qm beträgt? (q.)

3) Die Summe zweier anstoßender Seiten eines Rhomboids beträgt 108 m und ihre Differenz 28 m; wie groß ist der Inhalt desselben, wenn die größere Diagonale 84 m mißt?

4) Die Grundlinie eines Rhomboids mißt $a = 6{,}4$ m, die daranstoßende Seite $b = 4{,}2$ m und der eingeschlossene Winkel 60^0; wie groß ist seine Fläche?

5) Die Grundlinie eines Rhomboids ist $a = 8{,}4$ m lang, die daran stoßende Seite $b = 5{,}6$ m und der eingeschlossene Winkel mißt 30^0; welche Fläche hat dasselbe?

6) Die zwei anstoßenden Seiten eines Rhomboids sind 12 m und 15 m lang und der Inhalt desselben beträgt 165 qm. Wie groß sind die beiden Diagonalen?

7) Die beiden Diagonalen eines Rhomboids messen 24 m und 10 m; wie groß ist der Umfang desselben, wenn die eine der größeren Parallelseiten 14 m lang ist?

8) Eine rhomboidische Waldparzelle hat eine Fläche von 31,5 a. Die Linie, welche die entferntesten Eckpunkte miteinander verbindet,

mißt 124 m, und eine der längeren Seiten derselben ist 90 m lang. Welchen Umfang hat der Wald?

9) Wie groß ist die Resultante zweier Kräfte von 50 kg und 70 kg, die einen Winkel von 60° einschließen?

10. Trapez.

Mündlich.

1) Die beiden parallelen Seiten eines Trapezes betragen 23 m und 13 m (2,4 m und 1,2 m; 16,8 m und 14,4 m), die Höhe mißt 9 m (2 m; 12 m); welchen Inhalt hat dasselbe?

2) Der Inhalt eines Trapezes beträgt 106,4 qm (151,9 qm), die Höhe 9,5 m (12,4 m) und eine der beiden parallelen Seiten mißt 16,6 m (18,6 m); wie groß ist die andere parallele Seite?

3) Der Inhalt eines Trapezes beträgt 73,5 qm, die beiden parallelen Seiten messen 12,6 m und 8,4 m; wie groß ist die Höhe desselben?

4) Der Umfang eines Trapezes ist 134 m; die beiden nicht parallelen Seiten sind 22 und 18 m und die Höhe mißt 16,6 m; wie groß ist der Inhalt desselben?

5) Die Giebelseite eines zweistöckigen Hauses hat die Gestalt eines Rechteckes mit einem darauf ruhenden Trapez. Wie groß ist die Fläche derselben, wenn die Grundlinie des Rechteckes 5,8 m, die Höhe 4,8 m, die obere Seite des Trapezes 3,2 m und seine Höhe 3,4 m beträgt?

6) Der Boden eines Eckzimmers mit 4 Fensternischen soll belegt werden. Was kostet der ganze Boden, wenn das Zimmer ohne die Nischen 8 m lang und 6,5 m breit ist, und jede Nische auf der Zimmerseite eine Breite von 1,8 m, auf der Fensterseite von 1,4 m und eine Tiefe von 0,4 m hat, und für den Quadratmeter 5 *M* bezahlt werden?

7) Von einem rechtwinkligen Acker, der 240 m lang und 118 m breit ist, soll ein 145,14 a großes Stück verkauft werden. Die Teilungslinie soll von einem Punkt auf der Längenseite ausgehen, der dieselbe im Verhältnisse von 5 : 3 teilt. Wie muß die Gegenseite geteilt werden, wenn der größere Teil der durch den Punkt geteilten Längenseite zum verkauften Stück gehören soll?

8) Wie groß ist der Druck auf ein Trapez, dessen parallele Seiten 60 und 50 cm messen, und dessen Höhe 25 cm lang ist,

wenn sich diese Fläche in einem mit Wasser gefüllten Gefäße befindet, auf dessen Oberfläche ein Druck von 24 kg auf 1 qcm ausgeübt wird?

9) Der Inhalt eines Trapezes beträgt 138,75 qm, und die Höhe desselben mißt 5 m. Wie groß sind die beiden Parallelseiten, wenn sie sich wie 3 : 2 zu einander verhalten?

10) Es verhalten sich die Höhe und die beiden parallelen Seiten eines Trapezes wie 3 : 4 : 5 (4 : 5 : 6) zu einander. Wie groß sind diese Stücke, wenn der Inhalt des Trapezes 216 qm (550 qm) beträgt?

Schriftlich.

1) Die beiden parallelen Seiten eines Trapezes betragen a = 85,6 m und b = 112,6 m, die Höhe mißt h = 48,4 m; wie groß ist der Inhalt f desselben?

2) Die Höhe und die beiden parallelen Seiten eines Trapezes verhalten sich wie 2 : 3 : 5 zu einander und der Inhalt desselben beträgt 1479,68 qm; wie groß sind jene Stücke?

3) Ein trapezförmiges Feld ist 52 a 45,2 qm groß. Wie weit sind die parallelen Seiten voneinander entfernt, wenn die eine 82,6 m und die andere 66,2 m lang ist?

4) Von einem rechteckigen Acker, der 210 m lang und 124 m breit ist, wird ein 133,92 a großes Stück verkauft. Durch die Teilungslinie, welche über die ganze Breite des Grundstücks geht, wird die eine Längenseite im Verhältnis von 4 : 3 geteilt. Hievon gehört der kleinere Teil zum verkauften Stück. Wie lang ist die diesem Teil gegenüberliegende Seite des verkauften Stücks?

5) Die Dachfläche eines Hauses hat die Form eines Trapezes; die untere Grundlinie ist 19,3 m, die obere 9,2 m lang und der senkrechte Abstand beider beträgt 6,2 m. Wieviel Ziegeln von 0,4 m Länge und 0,2 m Breite sind zur Bedeckung derselben erforlich, wenn sie mit $^1/_4$ ihrer Fläche übereinander liegen?

6) Ein Schulhaus hat ein nach vier Seiten abfallendes (ein sogenanntes französisches) Dach. Die Länge der Firstlinie beträgt 12,4 m, die untere Längskante des Daches 18,6 m und die Entfernung der ersteren von der letzteren 9,06 m. Die Breite des Hauses (und des Daches) dagegen mißt 12,8 m und die Entfernung ihrer Mitte vom Ende des Firstes 8,05 m. Dieses Dach soll mit Zinkplatten, von welchen jede 1,48 m lang und 0,76 m breit ist, belegt

werden. Wie viele Platten sind erforderlich, wenn jede wegen Verschnitt und Verfalzen 25 % ihrer Fläche auf dem Dache weniger deckt?

7) Die größere der Parallelseiten eines Trapezes beträgt a = 1,84 m, die kleinere b = 0,68 m, und die beiden anderen sind c = 0,84 m und d = 0,72 m lang. Wie groß ist der Inhalt F dieses Trapezes?

8) Aus den vier Seiten AB = a, CD = b, AC = c und BD = d eines Trapezes soll die Höhe h desselben berechnet werden!

9) Es soll eine Formel zur Berechnung der Fläche F eines gleichschenkligen Trapezes entwickelt werden, wenn AB = a, CD = b und AC = BD = c ist.

10) Aus den drei Seiten a, b und c eines gleichschenkligen Trapezes soll die Höhe h desselben berechnet werden!

11) Eine Dachfläche bildet ein gleichschenkliges Trapez von 69,35 m Umfang; wieviel Quadratmeter Zinkblech sind zum Eindecken dieser Fläche nötig, wenn die kleinere Parallelseite 13,10 m und eine der nicht parallelen 11,5 m mißt?

12) Aus den beiden Diagonalen D_1 = 112 m und d = 100 m, sowie der Höhe h = 80 m eines Trapezes soll die Fläche F desselben berechnet werden.

11. Trapezoid.

Mündlich.

1) Die eine Diagonale eines Trapezoides mißt 3,6 m, und die darauf errichteten Senkrechten, die Höhen der Dreiecke, sind 1,6 m und 0,9 m lang; welchen Inhalt hat dasselbe?

2) Der Inhalt eines Trapezoides ABCD beträgt 92 qm; die von den Eckpunkten C und D auf die Diagonale AC gefällten Perpendikel sind 4 m und 5,2 m lang; welche Länge hat die Diagonale AC?

3) Ein Viereck von derselben Form hat einen Inhalt von 1050 qm und die Diagonale AC desselben mißt 75 m; wie lang ist jede der beiden von den Eckpunkten C und D auf AC gefällten Perpendikel, wenn sie um 8 m differieren?

Schriftlich.

1) Eine Flur hat die Gestalt eines Trapezoides; die eine Diagonale desselben mißt e = 16,4 km und die von zwei Eckpunkten des

Trapezoides auf jene Diagonale gefällten Perpendikel sind $h_1 = 3,6$ km und $h_2 = 3,8$ km lang. Wie groß ist der Inhalt dieser Fläche in ha?

2) Der Inhalt einer trapezoidischen Flur ABCD beträgt $F = 8428,3$ ha; wie lang ist die Diagonale $AC = e$ derselben, wenn man weiß, daß die aus zwei Eckpunkten des Trapezoides auf diese Diagonalen gefällten Lote $h_1 = 4,85$ km und $h_2 = 4,62$ km messen?

3) Der Inhalt eines Trapezoides ABCD beträgt $F = 2221,5$ a und die Diagonale $AC = e$ mißt 1500 m; wie lang sind die aus C und D auf AC gefällten Perpendikel h_1 und h_2, wenn sie um $d = 11,8$ m differieren?

4) In einem Trapezoid ABCD ist $AB = a = 8$ m, $BC = b = 7$ m, $CD = c = 9$ m, $DA = d = 5$ m, und die Diagonale $AC = e = 11$ m lang; wie groß ist der Inhalt F desselben?

5) In einem Viereck ABCD ist $AB = a = 60$ m, $BC = b = 110$ m, $CD = c = 120$ m und $DA = d = 80$ m; wie groß ist die Diagonale $BD = f$ und wie groß die Fläche F desselben, wenn a auf d senkrecht steht?

6) Von einem viereckigen Feld ABCD ist $BC = b = 75$ m, $CD = c = 72$ m und $DA = d = 50$ m lang; wie groß ist der Inhalt desselben, wenn b und d auf $AB = a$ senkrecht stehen?

7) Eine Fläche von der Form eines Trapezoides hat 26 m, 29 m, 37 m und 42 m lange Seiten, und die kleinere Diagonale der Figur mißt 41 m. Welchen Umfang hat ein inhaltsgleiches, gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis der längsten Umfangsseite des Trapezoides gleich ist?

§. 8. Die Eigenschaften der Linien und Winkel im Kreise, die sich aus den vorhergehenden Sätzen ergeben.

Konstruktionsaufgaben.

1) Man soll durch drei gegebene Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, eine Kreislinie legen.

2) Es soll um ein gegebenes Dreieck ein Kreis beschrieben werden.

3) Den Mittelpunkt eines Kreises oder Kreisbogens zu finden.

4) Es soll ein gegebener Kreisbogen halbiert werden.

5) Man soll eine Gerade ziehen, welche einen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt.

6) Es soll von einem Punkte P außerhalb eines Kreises aus an diesen eine Tangente gezogen werden.

7) Es soll in ein gegebenes Dreieck ein Kreis gelegt werden, so daß derselbe alle Seiten des Dreieckes berührt.

8) Über einer gegebenen Linie AB = 5 cm als Sehne soll ein Kreis beschrieben werden, in welchem alle auf dieser Sehne oder ihrem Bogen stehenden Peripheriewinkel einem gegebenen Winkel q = 54° gleich sind.

9) An zwei gegebene Kreise soll eine gemeinschaftliche Tangente konstruiert werden.

Rechenaufgaben.

Mündlich.

1) Der Radius eines Kreises ist 5 cm, eine Sehne in demselben 8 cm lang; wie groß ist ihre Entfernung vom Zentrum?

2) Der Radius eines Kreises beträgt $12\frac{1}{2}$ cm; die Entfernung einer Chorde vom Mittelpunkte mißt $7\frac{1}{2}$ cm; wie lang ist dieselbe?

3) Ein Zentriwinkel ist 120° 35′ 48″ groß; welche Größe hat jeder auf dem Bogen desselben stehende Peripheriewinkel?

4) Ein Zentriwinkel steht auf einem Bogen, welcher der achte Teil der Peripherie ist; wie groß ist ein auf gleichem Bogen stehender Peripheriewinkel?

5) Ein Sehnenwinkel faßt zwischen seinen Schenkeln die Bogen von 134° 45′ und 26° 15′; wie groß ist derselbe?

6) Ein Sekantenwinkel hat zwischen seinen Schenkeln Bogen von 120° 48′ und 40° 36′; wie groß ist derselbe?

7) Ein Sekantenwinkel ist 22° 58′ 36″ groß; die zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen verhalten sich wie 2 : 3; wie groß sind die zu diesen Bogen gehörigen Peripheriewinkel?

8) Die Größe eines Sekantenwinkels beträgt 42°; die Summe der zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen 164°; wie groß ist jeder derselben?

9) Die Radien zweier konzentrischer Kreise sind 25 und 15 cm lang; welche Länge hat die Sehne des größeren Kreises, welche zugleich Tangente des kleineren ist?

Schriftlich.

1) Der Radius eines Kreises ist $r = 0{,}73$ m, eine Sehne in demselben $s = 1{,}1$ m; wie groß ist ihre Entfernung a vom Mittelpunkte?

2) In einem Kreise ist der Halbmesser 0,17 m; die Länge einer Chorde beträgt 0,3 m; wie teilt sie den auf ihr senkrecht stehenden Durchmesser?

3) Der Halbmesser eines Kreises ist $r = 63$ m; die Entfernung einer Chorde vom Mittelpunkte $a = 37{,}8$ m; wie groß ist dieselbe?

4) Der Durchmesser eines Kreises ist 0,84 m; eine auf ihm senkrecht stehende Sehne teilt ihn in zwei Teile, von denen der eine 0,12 m lang ist; welche Länge hat die Sehne?

5) In einem Kreise ist gegeben die Sehne $s = 21$ m und ihre Entfernung $a = 8{,}8$ m vom Mittelpunkte; wie groß ist der Radius r des Kreises?

6) Der Durchmesser eines Kreises beträgt 8 m; außerhalb dieses Kreises liegt ein Punkt, der vom Zentrum desselben 7,2 m entfernt ist; welche Länge hat die von diesem Punkte an den Kreis gezogene Tangente?

§. 9. Die Proportionalität der Linien und die Ähnlichkeit der Figuren.

Konstruktionsaufgaben.

1) Eine gegebene Strecke AB soll in 5 gleiche Teile geteilt werden.

2) Es soll ein tausendteiliger Transversalmaßstab konstruiert werden.

3) Eine gegebene Strecke AB soll in zwei Teile, welche sich wie 2 : 5 verhalten, geteilt werden.

4) Zu drei gegebenen Strecken a, b und c soll die vierte Proportionale x konstruiert werden (Konstruktion der Formel: $x = bc : a$).

5) Zu zwei gegebenen geraden Linien a und b soll die dritte geometrische Proportionale konstruiert werden (Konstruktion der Formel: $x = b^2 : a$).

6) Man soll zu zwei gegebenen Geraden a und b die mittlere

geometrische Proportionale konstruieren (Konstruktion von $a : x = x : b$, oder $x = \sqrt{ab}$).

7) Ein gegebenes Rechteck soll in ein Quadrat verwandelt werden (Grundlinie = 8 cm, Höhe = 2 cm).

8) Man soll ein Quadrat konstruieren, das dreimal so groß ist als ein anderes von 30 mm Seite.

9) Es soll ein Quadrat konstruiert werden, welches gleich ist dem $^3/_5$ fachen eines anderen Quadrats von 75 mm Seite.

10) Man soll ein gleichseitiges Dreieck von 4 cm langer Seite in ein Quadrat verwandeln. (Anhang II, 10.)

11) Es soll die Summe von zwei Quadraten, deren Seiten a und b sind, in ein Quadrat verwandelt werden (Konstruktion der Formel: $x = \sqrt{a^2 + b^2}$).

12) Die Differenz von zwei Quadraten, deren Seiten a und b sind, soll in ein Quadrat verwandelt werden (Konstruktion der Formel: $x = \sqrt{a^2 - b^2}$).

13) Es soll ein Quadrat konstruiert werden, das fünfmal so groß ist als ein gegebenes Quadrat (ohne Anwendung der Konstruktion in Aufgabe 6).

14) Eine gegebene Strecke AB soll nach dem goldenen Schnitt geteilt werden, d. h. so, daß der größere Teil die mittlere Proportionale zwischen dem kleineren Teile und der ganzen Linie wird *). (Anhang II, 9.)

---

*) Die Teilung einer Strecke in zwei Teile, welche so beschaffen sind, daß der kleinere Teil (minor) in dem größeren (major) gerade so oft enthalten ist, als der größere in der ganzen Strecke, daß also das größere Stück die mittlere Proportionale zwischen dem kleineren Stück und der ganzen Strecke wird, heißt der goldene Schnitt (sectio aurea s. divina) oder die Teilung nach stetiger Proportion, wohl auch stetige Teilung. Wie diese Teilung durch Konstruktion auszuführen ist, zeigt die Auflösung zu dieser Aufgabe. Durch Rechnung lassen sich beide Teile nicht genau, sondern nur in Form unendlicher Decimalbrüche ausdrücken. So findet man z. B. für die Strecke 8 nach der Proportion $(8-x) : x = x : 8$ als größeren Teil 4,9442 (annähernd 5) und als kleineren Teil 3,0558 (annähernd 3), also $3{,}0558 : 4{,}9442 = 4{,}9442 : 8$, oder annähernd $3 : 5 = 5 : 8$. In der sogenannten Laméschen Zahlenreihe (Lamé, französischer Mathematiker, geb. 1795 zu Tours, gest. 1870 in Paris) : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610 . . . . ., in welcher je zwei nebeneinander stehende Zahlen zu einander addiert immer die nächstfolgende Zahl geben, nähern sich je drei benachbarte Gliede derselben um so mehr der Proportion des golde-

Rechenaufgaben.

Mündlich.

1) In einem Atlas ist eine Karte im Maßstab von 1 : 30 Mill. ausgeführt; eine zweite im Maßstabe von 1 : 12 Mill.; eine dritte von 1 : 40000 und eine vierte von 1 : 10000. Welche Länge auf der Erdoberfläche stellt eine Strecke von 1 cm dieser Karten dar?

2) Bei Anfertigung eines Katasterplanes wird 1 cm der Zeichnung zu 25 m angenommen. Wie groß ist die natürliche Länge einer Strecke von 0,3 m dieses Planes?

3) Eine Strecke ist 675 m lang; welche Länge wird dieselbe in einem Plane (Situationsplan) bekommen, der in dem Maßstab von 1 : 7500 angefertigt werden soll?

4) In einem Dreieck zieht man zu einer Seite eine die beiden andern Seiten schneidende Parallele; die beiden Teile der einen geschnittenen Seite sind 1,5 m und 3,6 m lang und der dem ersteren gegenüberliegende Teil der andern Seite 2,5 m; welche Länge hat der andere Teil?

5) Die drei Seiten eines Dreieckes sind 12,5, 16,25 m und 23,75 m lang. Parallel zur letzten Seite wird eine Linie so gezogen, daß durch sie die erste Seite in die beiden Stücke 5 m und $7^1/_2$ m geteilt wird. a) In welche Teile zerfällt die zweite Seite? b) Welche Länge hat die Parallele?

6) In einem Dreieck wird durch die Halbierungslinie eines Winkels die gegenüberliegende Seite in zwei Abschnitte von 7,5 m und 10 m geteilt. Die Summe der beiden andern Seiten beträgt 49 m. Wie lang ist jede derselben?

7) Die homologen Seiten zweier ähnlicher Dreiecke verhalten

---

nen Schnittes, je weiter man dieselbe fortsetzt. — Eine Teilung und Gliederung nach dem goldenen Schnitt macht einen angenehmeren Eindruck als nach anderen Proportionen. Sie findet sich entschieden bei vielen Naturgebilden, z. B. an den Blättern und Stengeln der Pflanzen, und ist auch von vielen Künstlern meist unabsichtlich bei Schöpfung ihrer Kunstwerke in Anwendung gebracht worden. Um den Nachweis der Proportion des goldenen Schnittes im Bereiche der Natur und Kunst hat sich namentlich Zeising (Professor der Philosophie in München, gest. 1876) große Verdienste erworben (man vergleiche sein 1854 erschienenes Werk: „Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers"). Ebenso hat in neuerer Zeit auch Pfeifer (Lycealprofessor in Dillingen) über diesen Gegenstand sehr eingehende Untersuchungen angestellt (man sehe sein Werk: „Der goldene Schnitt und dessen Erscheinungsformen in Mathematik, Natur und Kunst").

sich wie 5 : 8; eine Seite im kleineren Dreieck mißt 4,5 m; wie lang ist die homologe Seite des größeren Dreieckes? Wenn eine Seite des größeren Dreiecks $20^4/_5$ m lang wäre, welche Länge würde dann die homologe Seite des kleineren Dreieckes haben?

8) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind einander ähnlich, und zwar verhalten sich die homologen Seiten des einen Dreieckes zu denen des andern wie 3 : 2. Die Seiten des ersten Dreieckes sind 9 cm, 12 cm und 15 cm; welche Länge haben die homologen Seiten des letzteren?

9) Die drei Seiten eines Dreieckes sind 19,5 m, 25,2 m und 34,5 m lang; die kleinste Seite eines andern Dreieckes, das diesem ähnlich ist, beträgt 6,5 m; wie groß sind die beiden andern Seiten?

10) Der Schatten eines Baumes mißt 42,75 m; ein vertikal in die Erde gesteckter Stab von 4,5 m Länge wirft zu gleicher Zeit einen 4,75 m langen Schatten. Wie hoch ist der Baum?

11) Der Umfang eines Dreieckes beträgt $13^1/_2$ m; die Seiten eines ihm ähnlichen Dreieckes sind 10 m, $11^1/_4$ m und $12^1/_2$ m lang. Wie lang sind die Seiten des ersteren Dreiecks?

12) Eine Seite eines Dreieckes von 60 qm (49,5 qm) Inhalt mißt 12 m (15 m). Die hiezu homologe Seite eines ähnlichen Dreieckes hat eine Länge von 21 m (35 m). Wie groß ist der Inhalt des letzteren Dreieckes?

13) Jemand sieht in einer kleinen Wasserlache die Spitze eines Baumes. Wie hoch ist derselbe, wenn die Entfernung der Lache vom Fuße des Baumes 17,5 m und vom Fuße des Beobachters 1,25 m beträgt, und der Beobachter bis zu den Augen 1,7 m mißt?

14) Der Inhalt eines Dreieckes, dessen Höhe $7^1/_2$ m mißt, beträgt 61,875 qm. Welche Länge hat die Grundlinie eines ähnlichen Dreieckes, wenn sich die Höhe des ersteren zu der des letzteren wie 3 : 4 verhält?

15) Die drei Seiten eines Dreieckes messen 11,25 m, $12^1/_2$ m und 14 m. Eine zur ersteren Seite parallel gezogene Linie ist 6,75 m lang. In welche Stücke teilt diese Parallele die beiden andern Seiten?

16) Die beiden parallelen Seiten eines Trapezes sind $7^1/_2$ m und $12^1/_2$ m lang. Die beiden nichtparallelen Seiten, von denen die eine $11^1/_2$ m mißt, werden bis zu ihrem Durchschnitte verlängert. Wie groß ist die Verlängerung der $11^1/_2$ m langen Seite?

17) Um die Höhe eines Baumes AB zu bestimmen, stellte jemand in einiger Entfernung davon zwei Stäbe CD = 1,10 m und EF = 1,60 m vertikal so auf, daß er, über ihre Spitzen hin visierend, genau die Spitze des Baumes sah. Wie hoch ist derselbe, wenn die Entfernung der ersten Stange von der zweiten = 0,3 m und vom Baume = 12 m betrug?

18) Zwei Sehnen im Kreise schneiden sich so, daß die Abschnitte der einen Sehne 3,4 m und 4,5 m lang sind und ein Abschnitt der andern 1,5 m beträgt. Welche Länge hat die zweite Sehne?

19) Eine Sekante eines Kreises wird von der Peripherie desselben so geteilt, daß das äußere Stück 0,9 m und das innere 1,6 m mißt. Wie groß ist die zugehörige Tangente?

Schriftlich.

1) Von drei stetig proportionierten geraden Linien ist die erste 12,86 m, die zweite 16,34 m; wie groß ist die dritte?

2) Von drei stetig proportionierten geraden Linien ist die erste 16,86 m, die dritte 82,16 m; wie groß ist die zweite?

3) Man soll zwei Linien finden, deren Summe 30 m ist, und welche die mittleren Glieder einer Proportion bilden, deren äußere Glieder Linien von 3 m und 48 m Länge sind. (q.)

4) Es sollen zwei Linien gefunden werden, deren Differenz 5 m beträgt und welche die mittleren Glieder einer Proportion bilden, deren äußere Glieder Linien von 5 m und 60 m Länge sind (q.)

5) Eine Linie von a = 50 cm Länge soll nach dem goldnen Schnitt (stetig proportioniert geschnitten) geteilt werden; wie groß wird jeder Abschnitt? (q.)

6) Die drei Seiten eines Dreieckes haben eine Länge von 89,1 m, 132 m und 148,5 m. Parallel zur ersten Seite soll eine Linie so gezogen werden, daß das zwischen die zwei andern Seiten fallende Stück eine Länge von 5,4 m bekommt. In welcher Entfernung von der gegenüberliegenden Spitze schneidet diese Parallele die zwei andern Seiten?

7) Die Länge des Schattens eines von der Sonne beschienenen Turmes ist 40,5 m; die Schattenlänge eines daneben stehenden Stabes von 2,85 m Höhe ist 1,5 m. Wie hoch ist der Turm?

8) In einem Dreieck wird durch die Halbierungslinie eines Winkels die gegenüberliegende Seite in zwei Abschnitte von 22,8 m

und 38 m Länge geteilt; die Summe der beiden andern Seiten beträgt 76 m; wie lang ist jede derselben?

9) Der Umfang eines Dreieckes beträgt 4,58 m; die Seiten eines ihm ähnlichen Dreiecks sind 3,22 m, 4,37 m und 2,944 m lang; wie groß sind die Seiten des ersten Dreiecks?

10) Die homologen Seiten zweier ähnlicher Dreiecke sind 27,4 m und 109,6 m lang; wie groß ist der Inhalt des kleineren Dreiecks, wenn der des größeren 2959,2 qm beträgt?

11) Von einem Dreieck kennt man die Grundlinie $a = 3,5$ m und die dazu gehörige Höhe $h = 4,6$ m; in dasselbe ist ein Quadrat so eingeschrieben, daß dasselbe mit einer Seite auf der Grundlinie des Dreieckes, mit den beiden gegenüberliegenden Ecken auf den beiden andern Seiten desselben liegt. Wie groß ist die Seite x des Quadrates?

12) Die zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes gehörige Höhe teilt dieselbe in zwei Segmente, die 8 m und 19,22 m lang sind; wie groß ist die Höhe und der Inhalt des Dreieckes?

13) In einem rechtwinkligen Dreieck mißt die Hypotenuse 73,8 m, und ein durch die zugehörige Höhe gebildeter Abschnitt auf derselben ist 8,2 m lang; wie groß sind die beiden Katheten und jene Höhe?

14) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist 32,8 m, lang, und die dazu gehörige Höhe mißt 15,9 m. In welche Segmente zerfällt hiedurch die Hypotenuse? (q.)

15) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mißt 201,5 m und die Summe der zwei Katheten beträgt 282,1 m. Wie groß sind diese und die zur Hypotenuse gehörige Höhe? (q.)

16) Eine Karte von der Form eines Rechtseckes ist 80 cm lang und 82 cm hoch; dieselbe soll in verkleinertem Maßstabe so gezeichnet werden, daß ihre Fläche halb so groß wird. Welches müssen die Dimensionen der neuen Karte werden?

17) Die Seite AC eines Dreieckes ABC ist 250 m und die Seite BC desselben 280 m lang. Dasselbe soll durch eine zu AB parallele Gerade DE halbiert werden. Wie groß werden CD und EC?

18) Die Seite AC eines Dreieckes ABC ist 25 m lang, die Seite $AB = 29$ m und die Seite $BC = 36$ m. Daran soll durch eine zu AB parallel gezogene Linie DE ein Stück CDE abgeschnit-

ten werden, das einen Inhalt von 72 qm hat. In welcher Entfernung von C liegen auf AC und BC die Durchschnittspunkte der Teillinie und wie groß wird diese?

19) Der Radius einer leuchtenden Kugel sei R, der einer kleineren, von der ersteren beleuchteten undurchsichtigen Kugel r und der Abstand der Mittelpunkte beider Kugeln p m. 1) Wie groß ist die Länge des Kernschattens hinter der dunklen Kugel, vom Mittelpunkte dieser Kugel an gerechnet? 2) In welcher Entfernung vom Mittelpunkte der dunklen Kugel liegt die Spitze des Halbschattens? 3) Wie groß ist der Halbmesser des Kernschattens in einem Abstande von t m vom Mittelpunkte des dunklen Körpers? 4) Wie groß ist der Halbmesser des Halbschattens daselbst? (Anhang IV, 2.)

20) Welche Werte erhält man für die in Frage stehenden Größen x, y, z und u der vorigen Aufgabe, wenn $R = 12$ cm, $r = 4$ cm, $p = 40$ cm und $t = 5$ cm gesetzt wird?

21) Wie lang ist der Kernschatten der Erde, wenn a) der Halbmesser der Erde = 1, der der Sonne = 112 und der Abstand der Mittelpunkte beider = 23984 Erdhalbmesser gesetzt wird? b) wenn der Durchmesser der Erde 1720 Meilen, der der Sonne 192000 Meilen und die Entfernung der Sonne von der Erde 19778000 Meilen beträgt?

22) Wie groß ist die Dicke des Kernschattens der Erde in einer dem Abstande des Mondes von der Erde gleichen Entfernung?

23) Wie lang ist der Kernschatten des Mondes, wenn dieser zwischen der Erde und der Sonne steht, seine Entfernung von der Erde 50000 Meilen, sein Halbmesser 0,273 Erdhalbmesser und der Sonnenhalbmesser 112 Erdhalbmesser beträgt?

24) Wie weit muß eine Kugel, deren Radius 5 cm beträgt, von einer leuchtenden Kugel mit dem Radius 15 cm entfernt sein, damit der Kernschatten, vom Mittelpunkte der dunklen Kugel an gerechnet, 25 cm lang wird?

§. 10. Die regulären Polygone und die Berechnung des Kreises.

Konstruktionsaufgaben.

In und um einen gegebenen Kreis soll beschrieben werden: 1) ein reguläres Viereck, Achteck u. s. w.; 2) ein reguläres

Dreieck, Sechseck u. s. w.; 3) ein reguläres Fünfeck, Zehneck u. s. w.; und 4) ein reguläres Fünfzehneck, Dreißigeck u. s. w.

Rechenaufgaben.

a) Regelmäßige Vielecke.

Mündlich.

1) Die Seite eines regulären Drei-, Vier-, Fünf- und Sechsecks ist 3,8 cm lang; welchen Umfang haben diese Figuren?

2) Die Länge der Seite eines regelmäßigen Drei-, Vier- und Sechseckes ist 5 cm; welches ist der Inhalt dieser Figuren?

3) Der Radius eines Kreises ist 14 cm; diesem Kreis ist ein Quadrat ein- und umgeschrieben; wie groß ist jede der 3 Figuren? ($\pi = 3^1/_7$.)

4) Welche Beziehung findet zwischen einem Kreise und einem Quadrate hinsichtlich des Inhaltes statt?

Schriftlich.

1) Der Umfang eines regulären Sechseckes beträgt 288 m; wie groß ist die Fläche desselben?

2) Über der Seite a = 3 cm eines regulären Sechseckes soll ein Rechteck konstruiert werden, dessen Inhalt den dritten Teil von dem des Sechseckes beträgt. Welche Länge bekommt die Diagonale des Rechteckes?

3) Aus einem quadratförmigen Brett, dessen Seite 2 m mißt, soll das größte reguläre Achteck herausgeschnitten werden. Wie müssen die Ecken des Quadrates abgeschnitten werden?

4) Die Seite eines regulären Sechseckes mißt 2,4 m; wie lang ist der Radius des eingeschriebenen Kreises?

5) Aus dem Radius AC = r eines Kreises und der Seite AB = a eines eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes soll die Seite x des umgeschriebenen regelmäßigen Vieleckes von derselben Seitenzahl berechnet werden. (Anhang III, 3.)

6) Ebenso die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Polygons von doppelter Seitenzahl. (Anhang III, 4.)

7) Aus dem Halbmesser r = 6 cm eines Kreises soll die Seite und der Inhalt des ein- und umgeschriebenen gleichseitigen Dreieckes berechnet werden. (Anhang IV, 3.)

8) Es soll aus dem Radius r = 8 cm eines Kreises die Seite

und der Inhalt des ein- und umgeschriebenen regelmäßigen Vierecks berechnet werden.

9) Ebenso soll man aus dem Radius r = 3 cm eines Kreises berechnen die Seite und den Inhalt des ein- und umgeschriebenen regelmäßigen Sechsecks.

10) Aus dem Radius r eines Kreises soll die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Achteckes berechnet werden.

11) Der Radius eines Kreises ist 6 cm; wie lang ist die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehn- und Zwanzigeckes?

12) Aus dem Radius eines Kreises von 22 cm Länge soll die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zwölfeckes berechnet werden.

13) In einen Kreis soll ein reguläres Dreieck eingeschrieben werden von 6,928 m Seitenlänge; ein Quadrat von 7,07 m Seitenlänge; wie groß muß der Halbmesser des Kreises werden?

b) Der ganze und halbe Kreis.

Mündlich.

1) Von einem Kreise ist der Halbmesser r gegeben; wie groß ist der Durchmesser d, die Peripherie p und der Flächeninhalt q desselben?

2) Der Durchmesser eines Kreises ist d; welche Formel erhält man für r, p und q desselben?

3) Aus dem Umfange p eines Kreises soll r, d und q desselben gefunden werden.

4) Von einem Kreise ist q gegeben; wie groß ist r, d und p desselben?

5) Der Radius eines Kreises ist 4 (3 m; 5 m); wie groß ist der Durchmesser, die Peripherie und der Inhalt desselben?

6) Zwei Räder von 3 cm und $22^1/_2$ cm Radius werden durch eine Schnur ohne Ende in Bewegung gesetzt. Wie viele Umdrehungen des kleineren Rades kommen auf eine Umdrehung des größeren?

7) Der Durchmesser der Glasscheibe einer Elektrisiermaschine ist 56 cm (70 cm). Wie groß ist die Fläche derselben ($\pi = 3^1/_7$)?

8) Die Peripherie eines Kreises mißt 88 cm; welchen Inhalt hat derselbe ($\pi = 3^1/_7$)?

9) Wie groß ist bei einem Barometerstande von 76 cm der Luftdruck auf die Fläche eines Kreises von 7 cm Radius ($\pi = 3^1/_7$; der Luftdruck auf 1 qcm beträgt bei 76 cm Barometerstand 1,033 kg)?

10) Der Inhalt eines Kreises beträgt 50,24 qcm; wie groß ist der Radius desselben? (π = 3,14.)

11) Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, dessen Inhalt 616 qcm beträgt ($\pi = 3^1/_7$)?

12) Die Summe von Durchmesser und Umfang eines Kreises beträgt 2,03 m; wie groß sind beide?

13) Der wievielte Teil ist ein Kreis von seinem Durchmesserquadrat; wie läßt sich dies zeigen?

Schriftlich.

1) Der Radius eines Kreises ist 4,6 m; der Durchmesser eines zweiten 10,4 m; die Peripherie eines dritten 1,3188 m und der Inhalt eines vierten 211,1336 qm. Aus jeder dieser Größen soll man die drei andern berechnen.

2) Der Minutenzeiger einer Uhr hat eine Länge von 11 cm, der Stundenzeiger von 8 cm; welchen Weg macht die Spitze eines jeden Zeigers während 24 Stunden?

3) Zwei Rollen einer Maschine werden durch ein und dasselbe Seil in Bewegung gesetzt; die eine Rolle hat einen Radius von 0,08 m und dreht sich 12mal, während sich die andere in derselben Zeit nur 5mal dreht; welchen Durchmesser hat die zweite Rolle?

4) Wie groß ist die Fläche der Äquatorsebene, wenn ihr Umfang 5400 geographische Meilen beträgt?

5) Wie viele Umläufe macht ein Rad von 1 m Durchmesser auf einer Strecke, welche eine Länge von 2 km hat?

6) Ein Wasserrad, dessen Durchmesser 6 m beträgt, hat an seinem Umfange 45 Schaufeln; wie weit sind diese voneinander entfernt?

7) Zwei Kreise haben zusammen einen Inhalt von 336,1684 qm; der eine ist um 230,6016 qm größer als der andere; wie groß sind die Radien beider Kreise?

8) Ein Fußgänger braucht zu einem Gang um einen kreisrunden Teich 12 Minuten, wenn er in jeder Sekunde 1,2 m zurücklegt; welche Fläche hat der Teich?

9) Die Summe aus dem Umfange und Durchmesser eines Kreises beträgt 24,84 m; wie groß ist der Durchmesser?

10) Aus der Summe s der Fläche und dem Quadrate des Halbmessers soll der letztere gefunden werden.

11) Die Summe der Umfänge zweier Kreise ist s und deren Differenz d; wie groß sind die Halbmesser R und r derselben?

12) Eine cylindrische Büchse von 0,025 m Radius faßt 200 Zündhölzchen; wieviel Zündhölzchen faßt eine Büchse von 0,0425 m Radius?

13) Eine cylindrische Ausflußöffnung am Boden eines Gefäßes hat einen Durchmesser von 0,025 m; wie groß muß derselbe werden, wenn in derselben Zeit bei gleicher Druckhöhe 2 mal so viel Wasser ausfließen soll als früher?

14) Ein Kreis hat mit einem Quadrate von 5 m Seitenlänge gleichen Umfang; wie groß ist der Unterschied des Inhaltes zwischen dem Quadrate und dem Kreise?

15) Eine Fläche von 15,5 a Inhalt soll a) in einen Kreis; b) in ein Quadrat; c) in ein Rechteck, dessen Seiten sich 2 : 5 verhalten; d) in ein gleichseitiges Dreieck verwandelt werden. Wie groß ist der Unterschied in den Umfängen dieser Figuren?

16) Ein Kreis hat denselben Inhalt wie die folgenden Figuren zusammen, nämlich a) ein Quadrat von 3,5 m Seitenlänge; b) ein Rechteck von 6,75 m Länge, dessen Höhe um 20 % kleiner ist; c) ein Dreieck von 4,2 m Grundlinie und 5,6 m Höhe; d) ein Trapez, dessen parallele Seiten 6,8 m und 5,4 m lang sind, und dessen Höhe 3,2 m beträgt. Wie groß ist der Radius dieses Kreises?

17) Wie groß ist die lineare Geschwindigkeit eines Körpers, der in $t = 4$ Sekunden die Peripherie eines Kreises vom Radius $r = 6$ m durchläuft?

18) Das Schwungrad einer Dampfmaschine hat einen Durchmesser von 4 m und macht 40 Umläufe in der Minute; welche Geschwindigkeit (in der Sekunde) hat sein äußerer Umfang?

19) Wie groß ist die lineare Geschwindigkeit eines Punktes des Erdäquators bei der Umdrehung der Erde um ihre Achse?

20) Ein Mühlstein, dessen Durchmesser d m beträgt, soll eine Umfangsgeschwindigkeit von v m erhalten. Wie viele Umläufe x muß derselbe in einer Minute machen?

21) Ein Mühlstein soll in der Minute n Umläufe machen und

die Umfangsgeschwindigkeit des Steines muß v m betragen. Wie groß muß der Durchmesser x desselben genommen werden?

22) Wie viele Umläufe x muß ein Wasserrad von d m Durchmesser in der Minute machen, damit es eine Umfangsgeschwindigkeit von v m hat?

23) Die vorderen Räder eines Wagens drehen sich, wenn dieser 180 m vorwärts geht, 9 mal öfter um, als die hinteren Räder; würde man aber den Umfang sowohl der Vorder- als Hinterräder um 1 m vergrößern, so würden die ersteren auf derselben Strecke nur 6 mal öfter umlaufen, als die letzteren. Wie groß ist die Peripherie der Vorder- und Hinterräder?

24) Ein Grundstück in der Form eines Trapezes, dessen parallele Seiten 16 und 20 m lang sind und dessen Höhe 124 m beträgt, wird gegen ein gleich großes quadratisches Grundstück vertauscht. Letzteres will man in einen Garten verwandeln. In der Mitte desselben soll ein kreisrundes Bassin von 3,4 m Durchmesser angebracht werden; die Wege, die man von der Mitte jeder Seite des Gartens bis zum Bassin und um dieses, sowie um den Garten herum führen will, sollen 1,2 m breit werden. Es fragt sich nun: **a)** Wie lang ist die Seite des Gartens? **b)** Wie groß das Bassin? **c)** Welchen Flächenraum werden die Wege um den Garten und um das Bassin zusammen einnehmen? **d)** Wie groß wird die zu bebauende Fläche mit Einschluß der übrigen Wege?

25) Ein vierseitiger rechtwinkliger Tisch hat an den beiden kurzen Seiten zwei halbkreisförmige hängende Blätter. Ohne dieselben beträgt der Inhalt des Tisches 2,88 qm. Die größte Länge des Tisches mit den aufgeklappten Blättern mißt 3,6 m. Wie groß ist der Inhalt des ganzen Tisches?

26) Ein Kirchenfenster hat die Form eines Quadrats mit daran stoßendem Halbkreis, dessen Durchmesser die Quadratseite ist. Die Diagonale des Quadrats mißt 1,7 m. Welchen Flächeninhalt hat das ganze Fenster?

c) **Kreisring.**

Mündlich.

1) Die Radien zweier konzentrischer Kreise sind R und r; wie groß ist die Fläche kr ihres Ringes?

2) Aus den Durchmessern D und d zweier konzentrischer Kreise soll die Ringfläche bestimmt werden.

3) Die Umfänge zweier konzentrischer Kreise sind P und p; daraus soll die Ringfläche bestimmt werden.

4) Es werden die Mittelpunkte zweier kreisförmiger Scheiben von 7 cm und 3 cm Radius aufeinander gelegt. Welchen Inhalt hat die über die kleinere Scheibe hervorragende Fläche?

5) Der innere schwarze Kreis einer Schießscheibe hat einen Durchmesser von 72 cm; der diese Fläche umgebende weiße Ring ist 28 cm breit. Wie groß ist letztere?

6) Die Ringfläche zweier konzentrischer Kreise beträgt 50,24 qcm und der Radius des größeren Kreises 5 cm; wie groß ist der Radius des kleineren Kreises?

7) Die Fläche eines Kreises von 2 cm Radius soll um 37,68 qcm so vergrößert werden, daß die entstehende Fläche wieder ein Kreis wird; wie groß wird der Radius dieses Kreises?

Schriftlich.

1) In der Mitte eines kreisförmigen Teiches, dessen Radius 20 m ist, befindet sich eine kreisrunde Insel von 4,5 m Radius. Wie groß ist die Wasserfläche rings um die Insel?

2) Der Durchmesser der beweglichen Scheibe einer Influenzmaschine beträgt 44 cm und der der feststehenden 50 cm. Wie groß ist die über die kleinere Scheibe hervorragende Fläche?

3) Der äußere Umfang eines runden Turmes ist 21,98 m und der innere Umfang 18,84 m; wie groß ist die Grundfläche der Mauer?

4) Der innere schwarze Kreis einer Schießscheibe hat einen Durchmesser von 0,65 m; der diese Fläche umgebende weiße Ring ist 0,25 m breit. Wie groß ist dieser Ring?

5) Aus der Ringfläche kr = 22,6080 qm zweier konzentrischer Kreise und dem großen Radius R = 3,6 m soll der Radius r des kleineren Kreises gefunden werden!

6) Die Fläche eines kreisförmigen Teiches, dessen Radius r = 36 m beträgt, soll um 330 qm vergrößert werden; wie groß ist der Radius R des so entstehenden ebenfalls kreisförmigen Teiches?

7) Aus der Summe s = 21 m der Halbmesser zweier konzentrischer Kreise und der Ringfläche kr = 250,572 qm sollen die Halbmesser gefunden werden!

d) Kreisbogen, Kreissektor und Ringausschnitt.

Mündlich.

1) Der Radius eines Kreises beträgt r; wie lang ist ein Bogen b, der zu einem Zentriwinkel von n° gehört?

2) Aus der Länge b eines Bogens und dem dazu gehörigen Zentriwinkel n soll der Radius des Kreises bestimmt werden.

3) Die Länge eines Bogens ist b; welcher Zentriwinkel gehört zu demselben, wenn der Radius des Kreises r ist?

4) Der Radius eines Kreises ist 6 cm; wie lang ist der zu einem Zentriwinkel von 45° gehörende Bogen?

5) Wie groß ist der Radius eines Kreises, wenn der zu einem Zentriwinkel von 90° gehörige Bogen 6,28 cm lang ist?

6) Welcher Zentriwinkel gehört zu einem Bogen von 3,14 cm, wenn der Radius des Kreises 4 cm beträgt?

7) Der Minutenzeiger einer Uhr ist 12 cm lang; welchen Weg legt die Spitze desselben zurück, während sich der Zeiger von der Ziffer 12 bis zur Mitte zwischen den Ziffern 1 und 2 bewegt?

8) In einem Kreise ist r der Halbmesser, sk der Inhalt eines Sektors und n sein Zentriwinkel. Aus zweien dieser Größen soll die dritte bestimmt werden.

9) Es soll der Inhalt sk eines Kreissektors gefunden werden, wenn sein Bogen in Längenmaß gleich b und der Radius des Kreises r gegeben sind.

10) Der Radius eines Kreises ist 4 cm und ein Zentriwinkel 45°; wie groß ist der dazu gehörige Sektor?

11) Wie groß ist ein Sektor in einem Kreise von 4 cm Radius, wenn der Bogen 3,14 cm beträgt?

12) In einem Kreise vom Radius r = 5 m (10 m) ist ein Sektor 15,7 qm groß; welche Größe hat der zugehörige Zentriwinkel?

13) Ein 9,42 qcm großer Sektor hat einen Zentriwinkel von 120°; wie groß ist der Radius dieses Kreises?

14) Die Radien zweier konzentrischer Kreise sind 5 cm und 3 cm; wie groß ist der zu einem Zentriwinkel von 45° gehörige Ringausschnitt?

Schriftlich.

1) Wie groß ist der zu einem Zentriwinkel von 24° 12′ 18″ gehörige Bogen eines Kreises vom Radius 6 m?

2) Wie groß ist der zu einem Bogen von 2,8574 m gehörige Zentriwinkel, wenn der Halbmesser des Kreises 3,6 m beträgt?

3) Welchen Radius hat ein Kreis, wenn der zu einem Zentriwinkel von 65° 45′ gehörige Bogen 4,1291 m mißt?

4) Wie groß ist der Zentriwinkel, dessen Bogen gleich dem Halbmesser ist?

5) Wie groß ist der Zentriwinkel, dessen zugehöriger Bogen gleich dem Doppelten, dem Dreifachen des Radius ist?

6) Die französische Gradmessung vom Jahre 1792 gab den zu einem Winkel am Zentrum von 9° 40′ 25,7″ gehörenden Bogen des Pariser Meridians zwischen Barcelona und Dünkirchen = 551584,72 Toisen an *). Wie groß ist darnach der Radius der als Kugel vorausgesetzten Erde?

7) „Eine Eisenbahn soll im Bogen eines Kreises vom Halbmesser gleich 1000 m aus einer Richtung in eine andere, die mit der ersteren einen Winkel von 45° macht, übergeführt werden. Wie lang ist der Kreisbogen der Eisenbahn (also der Bogen zwischen den Punkten, für welche jene Richtungen zwei Tangenten bilden)?"

8) Welchen Inhalt hat ein Sektor, wenn der Mittelpunktswinkel 45° (48° 48′) beträgt und der Radius 3 m (5,6 m) lang ist?

9) Wie groß ist die Fläche eines Sektors, wenn der Radius 2,25 m und die Bogenlänge 6,5 m ist?

10) Wie viele Grade umfaßt ein Sektor, wenn dessen Fläche 2,9987 qm und der Halbmesser 2 m beträgt?

11) Ein Kreisausschnitt, dessen Zentriwinkel 45° beträgt, hat 6,9237 qm Inhalt. Wie groß ist der Radius des Kreises?

12) Wie groß ist der Zentriwinkel, dessen zugehöriger Sektor gleich ist a) dem Quadrate des Radius, b) dem Quadrate des zugehörigen Bogens?

13) In einem Kreise mißt eine Sehne 92,8 m und ihre Entfernung vom Zentrum 34,8 m; wie groß ist in demselben ein Sektor, dessen Zentriwinkel 22° 30′ beträgt?

14) Der Inhalt eines konzentrischen Ringstücks beträgt 55,107 qm, der dazu gehörige Zentriwinkel mißt 67,5° und die beiden Radien differieren um 6 m. Wie groß sind die Radien?

---

*) Eine Toise (spr. Toahs'), ein Längenmaß, ist in Frankreich als alte T. = 1,949 m, als neue T. = 2 m groß.

e) **Kreissegment.**

Schriftlich.

1) Aus der Länge s einer Sehne und dem Halbmesser r soll die Fläche f des von der Sehne und den beiden Halbmessern begrenzten Dreieckes gefunden werden.

2) Aus der Sehne s, dem Zentriwinkel n und dem Halbmesser r soll die Segmentfläche f gefunden werden.

3) Welchen Inhalt hat ein Kreisabschnitt, wenn der zugehörige Zentriwinkel 60° beträgt und der Halbmesser des Kreises 3,5 m groß ist?

4) In einen Kreis, dessen Radius r = 4 cm beträgt, sind ein regelmäßiges Drei-, Vier- und Sechseck eingeschrieben. Wie groß sind die Kreissegmente über den Seiten?

5) Der Inhalt eines in einen Kreis geschriebenen regelmäßigen Sechseckes beträgt 41,568 qcm. Welchen Inhalt hat das über einer Seite liegende Segment?

6) In einen Kreis ist ein reguläres Sechseck eingeschrieben. Der Inhalt des über einer Seite liegenden Kreissegments beträgt 3,252 qcm. a) Welchen Inhalt hat das Sechseck; b) wie lang ist das betreffende Bogenstück?

§. 11. Die Ellipse.

Rechenaufgaben.

1) Ein elliptisches Gartenbeet ist 10 m lang und 8 m breit. Welchen Inhalt und Umfang hat dasselbe?

2) Die Achsen einer Ellipse sind 16 und 12,4 m lang. Welchen Inhalt und Umfang hat dieselbe?

3) Die beiden Achsen einer Ellipse sind 24 m und 18 m lang; gerade so lang sind die Länge und Breite eines Rechteckes. Wie groß sind die Inhalte dieser Flächen?

Zweiter Teil.

Stereometrische Aufgaben.

§ 12. Das Prisma.

a) Der Würfel.

Mündlich.

1) Die Kante eines Würfels mißt a = 7 cm (0,9 m; 2,8 m); wie groß ist die Oberfläche O und das Volumen K?

2) Sämtliche Kanten eines Würfels haben zusammen eine Länge von 7,2 m (21,6 m); wie groß ist die Oberfläche und das Volumen?

3) Die Kante eines Würfels ist a = 5 cm lang; wie groß ist die Seitendiagonale d, die Diagonalachse A_1 und die Diagonalebene E_1 desselben?

4) Der Inhalt eines Würfels beträgt K = 512 ccm (0,729 cbm; 1728 ccm); welches ist die Länge der Kante a?

5) Die Seiten eines hohlen, oben offenen Würfels aus Blech sind 2,8 m lang; was kostet derselbe, wenn 1 qm Blech zu 1,20 ℳ gerechnet wird?

6) Die Kantenlänge eines Würfels beträgt 2,5 m; wieviel m Zeug braucht man zum Überziehen desselben, wenn es 0,75 m breit ist?

7) Die Inhalte zweier Würfel verhalten sich wie 125 : 343; wie lang sind die Kanten derselben, wenn sie sich um 4 cm voneinander unterscheiden?

8) Die Kanten zweier Würfel verhalten sich wie 3 : 8; wie verhalten sich ihre Oberflächen und Inhalte?

9) Die Inhalte zweier Würfel betragen zusammen 2240 cbm und verhalten sich zu einander wie 8 : 27; wie lang sind die Kanten derselben?

10) Die Kante eines Würfels mißt 0,8 m; wie schwer ist der-

selbe, wenn der Stoff, woraus er besteht, das spezifische Gewicht *) 5,5 hat?

11) Das absolute Gewicht eines Würfels, dessen Stoff das spezifische Gewicht 5,2 hat, beträgt 140,4 kg. Wie groß ist die Kante dieses Würfels und wieviel wiegt derselbe im Wasser?

12) Von zwei Würfeln ist der eine um 3159 cbm größer als der andere und ihre Kanten verhalten sich wie 2 : 5. Wie lang sind die letzteren?

Schriftlich **).

1) Aus der Kante AB = a = 5,6 m eines Würfels soll berechnet werden: 1) der Inhalt K, 2) die Oberfläche O, 3) die Diagonalachse ***) AG = A_1 und 4) die Diagonalebene †) ACEG = E_1 desselben. Fig. 1.

---

*) Bei stereometrischen Aufgaben kommen häufig die Beziehungen zwischen dem Gewicht p, dem Volumen v und dem spez. Gewicht s eines Körpers zur Anwendung. Die folgenden Gleichungen drücken diese wichtigen Beziehungen aus.

1) p = v. s, d. h. das absolute Gewicht eines Körpers findet man, wenn man sein Volumen mit seinem spez. Gewicht multipliciert;

2) v = p : s, d. h. das Volumen eines Körpers wird gefunden, wenn man sein absolutes Gewicht durch sein spez. Gewicht dividiert;

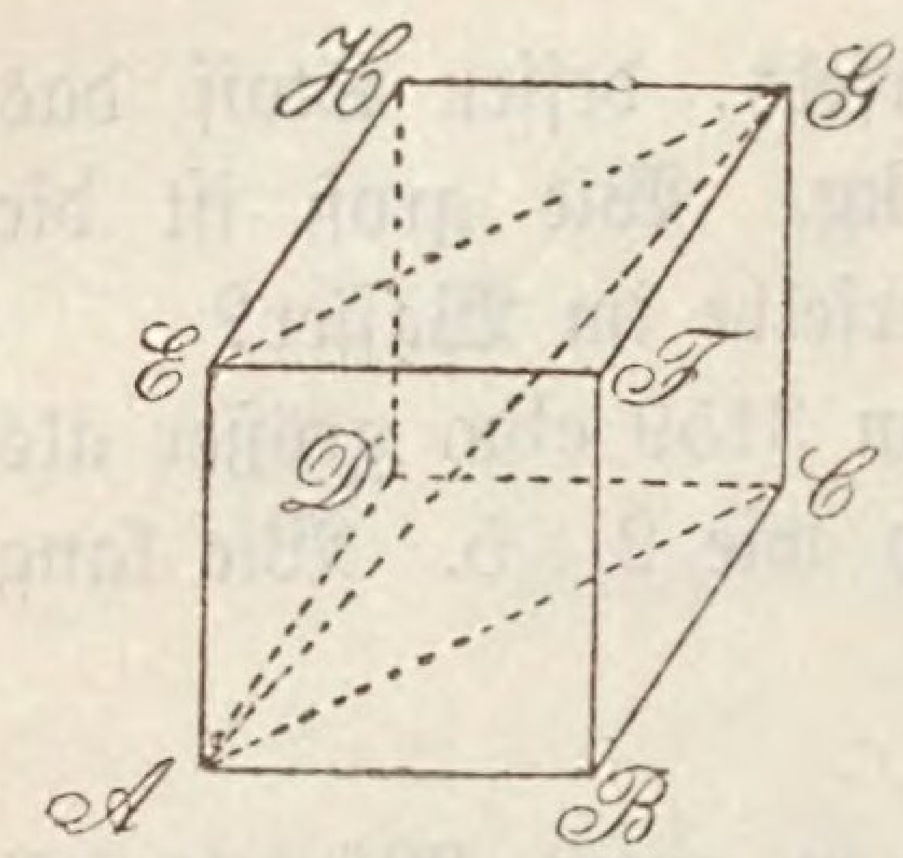
3) s = p : v, d. h. das spez. Gewicht eines Körpers wird gefunden, indem man sein absolutes Gewicht durch sein Volumen dividiert. — Hiebei muß besonders betont werden, daß p und v in entsprechenden Maßen ausgedrückt werden müssen, v in cdm, wenn p in kg, v in ccm, wenn p in g, v in cbm, wenn p in Tonnen ausgedrückt ist.

**) Zur Übung im Konstruieren kann man von dem Würfel und den nachfolgenden Körpern die Netze darstellen lassen. Unter dem Netz eines Körpers versteht man die Zeichnung, welche sämtliche Grenzflächen desselben zusammenhängend in einer einzigen Ebene darstellt. Die Körpernetze dienen nicht bloß zur Bestimmung der Oberfläche, sondern auch, indem man sie in Karton ausschneidet und gehörig zusammenfügt, zur Anfertigung von Modellen geometrischer Körper. Die Projektion (Grundriß und Aufriß) und die perspektivische Darstellung der Körper gehören mehr in das Gebiet des Zeichnens.

***) Unter Diagonalachse (Körperdiagonale) eines Würfels (eines Prismas) versteht man die Verbindungslinie zweier Eckpunkte desselben, welche nicht derselben Begrenzungsfläche angehören.

†) Unter Diagonalebene eines Würfels (Prismas) versteht man jede Ebene, welche durch zwei nicht unmittelbar aufeinander folgende Seitenkanten desselben gelegt werden kann und von seiner Oberfläche begrenzt wird.

Fig. 1.



2) Der körperliche Inhalt eines Würfels beträgt K = 32,768 cbm; wie groß ist 1) die Kante a, 2) die Oberfläche O, 3) die Diagonalachse A_1 und 4) die Diagonalebene E_1 des Würfels?

3) Aus der Oberfläche O = 26,46 qm eines Würfels soll berechnet werden: 1) die Kante a, 2) der körperliche Inhalt K, 3) die Diagonalachse A_1 und 4) die Diagonalebene E_1 desselben.

4) Die Diagonalachse eines Würfels beträgt A_1 = 6 m; es soll daraus berechnet werden: 1) die Kante a, 2) der Inhalt K, 3) die Oberfläche O, 4) die Seitendiagonale d und 5) die Diagonalebene E_1 des Würfels.

5) Die Seitendiagonale eines Würfels beträgt d = 8 m; man soll hieraus berechnen: 1) den Inhalt K, 2) die Oberfläche O und 3) die Diagonalachse A_1 desselben.

6) Die Diagonalebene eines Würfels ist E_1 = 54 qm; man soll hieraus berechnen: 1) den Inhalt K, 2) die Oberfläche O und 3) die Seitendiagonale d desselben.

7) Der körperliche Inhalt eines Würfels beträgt 156590,819 cbm; wie groß ist die Kante desselben?

8) Wie groß ist die Seite eines Würfels, der n = 2 mal so groß ist als ein anderer Würfel von a = 1,2 m Höhe *)?

9) Wie groß ist die Kante eines Würfels, der so groß ist wie drei andere Würfel zusammen, deren Kanten a = 2 m, b = 2,5 m und c = 3 m sind?

10) Die Differenz zwischen den Kanten zweier Würfel beträgt 2 m und der Kubikinhalt beider unterscheidet sich um 2168 cbm. Wie groß sind beide?

11) Von drei würfelförmigen Gefäßen ist das erste 5 cm höher

---

*) Die im Altertum berühmt gewordene Aufgabe, die Seite eines Würfels zu finden, welcher dem Inhalte nach doppelt so groß ist, als ein gegebener, heißt Delisches Problem oder duplicatio cubi. Der Sage nach soll das Orakel in Delos, als dasselbe während einer Pest in Griechenland befragt wurde, was zu thun sei, die Antwort gegeben haben, man solle den Altar des Apollo, welcher ein Würfel war, verdoppeln. Da man dies nicht auszuführen gewußt, habe man bei Plato dazu die Anweisung gesucht.

als das zweite, dieses 5 cm höher als das dritte. Wenn man das zweite leere aus dem ersten vollen und hierauf das dritte leere aus dem zweiten vollen füllt, so enthält das erste noch $6^3/_4$ Liter mehr als das zweite. Wieviel faßt jedes einzelne Gefäß?

12) Man hat zwei hohle Würfel; gießt man eine gewisse Menge Wasser in den einen, so bleiben noch 3736 ccm Raum in demselben übrig; damit der andere Würfel diese Menge Wasser fassen könnte, müßte er um 296 ccm größer sein. Wieviel beträgt jene Wassermenge? Wie groß ist jede Kante beider Würfel, wenn sie sich um 12 cm unterscheiden?

13) Die Kante eines massiven Würfels mißt a = 2,5 m; wie schwer ist derselbe, wenn sein spez. Gewicht s = 8,75 ist?

14) Ein metallener Würfel, dessen Kante a = 6,5 dm beträgt, ist so ausgehöhlt, daß der hohle Raum ebenfalls einen Würfel bildet. Wie schwer ist der Würfel, wenn die Dicke seiner überall gleichmäßigen Wand d = 1 dm und sein spez. Gewicht s = 3,2 beträgt?

15) Die Diagonalebene eines Würfels beträgt 84,852 qdm; wie groß ist die Oberfläche eines Würfels, bei welchem dieser Diagonalschnitt eine 6 mal so kleine Fläche hat?

16) Die Volumina zweier Würfel betragen zusammen a = 12,005 cbm, die Summe ihrer Kantenlänge ist b = 3,5 m. Wie lang sind ihre Kanten?

17) Ein goldener Würfel hat einen Wert von 2042825,4 *M.* Wie groß ist die Kante desselben, wenn 1 kg Gold 2700 *M* kostet und das spez. Gewicht des Goldes 19,25 beträgt?

18) Wieviel kg Korkholz vom spez. Gewicht s = 0,24 müssen mit einem Würfel aus Blei, welcher a = 3,4726 kg wiegt, verbunden werden, damit die verbundenen Körper dasselbe wiegen, wie ein gleiches Volumen Wasser, also im Wasser schweben, vorausgesetzt, daß das spez. Gewicht des Bleies p = 11,35 ist (Anhang IV)?

19) Wieviel kg Blei müssen mit einem Würfel aus Tannenholz von 0,6 m Seitenlänge verbunden werden, damit die verbundenen Körper im Wasser schwimmen, vorausgesetzt, daß das spez. Gewicht des Bleies 11,35 und das des Tannenholzes 0,45 ist?

b) Das Parallelepipedum*).

Mündlich.

1) Die Grundkanten eines Rechteckers sind 3 und 4 m (4,5 und 8,4 m), und die Höhe beträgt 6 m (10,5 m). Wie groß ist die Oberfläche und das Volumen?

2) Wie groß ist die Oberfläche und das Volumen einer quadratischen Säule, wenn die Grundkante derselben 6 m (2,5 m) und die Höhe 8 m (5,4 m) mißt?

3) Das Volumen eines Rechteckers beträgt 51,2 cbm und seine Höhe 8 m; wie groß ist die Grundfläche?

4) Wie hoch ist eine quadratische Säule, deren Inhalt 1,2 cbm und deren Grundkante 0,4 m beträgt?

5) Eine quadratische Säule ist 15 m hoch und hat einen Inhalt von 33,75 cbm. Welche Länge haben die Grundkanten?

6) Der Inhalt einer quadratischen Säule beträgt 4608 ccm und die Höhe derselben ist 9 mal so groß als ihre Grundkante. Welche Länge haben die genannten Dimensionen?

7) Eine Planke ist 15,5 m lang, 0,5 m breit und 0,08 m dick. Wie groß ist das Volumen derselben?

8) Eine Bohle ist 5 m lang, 0,8 m breit und 0,08 m dick; wie teuer kommt dieselbe, wenn der Kubikmeter behauenes Holz zu 20 ℳ gerechnet wird?

9) Welchen Inhalt haben 800 Eisenbahnschwellen, von welchen jede 0,4 m breit, 0,3 m dick und 2,7 m lang ist?

10) Eine Grube hat die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums, dessen Grundfläche $1^3/_5$ qm und dessen Tiefe 2,23 m beträgt. Wieviel Liter Wasser kann dieselbe fassen?

11) Ein rechtwinkliger Kasten ist im Lichten 2,5 m lang, 1,8 m breit und 1,9 m tief. Wieviel Hektoliter Getreide faßt derselbe?

12) Wieviel wiegt ein 0,8 m langer, 0,3 m breiter und 0,5 m dicker Sandstein, wenn das spez. Gewicht des Sandsteins 2,4 ist?

13) Die Bodenfläche eines rechtwinkligen Gefäßes ist 0,7 m lang und 0,5 m breit; wie groß ist der Bodendruck, wenn dasselbe bis zu einer Höhe von 0,9 m a) mit Wasser, b) mit Weingeist und c) mit Quecksilber gefüllt ist?

---

*) Dem rechtwinkligen Parallelepipedum kann man auch den Namen Rechtecker geben, da die ihn einschließenden Rechtecke das augenfällige Merkmal desselben bilden.

14) Eine Grube von 5,4 m Länge und 4 m Breite soll 5,4 cbm Wasser fassen; wie tief muß dieselbe werden?

15) Ein Kasten faßt 25,5 cbm und ist 2,5 m breit und 3 m hoch; wie lang ist derselbe?

16) Auf einem 8 m langen und 5,5 m breiten Speicher werden 330 hl Getreide aufgeschüttet. Welche Höhe hat dasselbe?

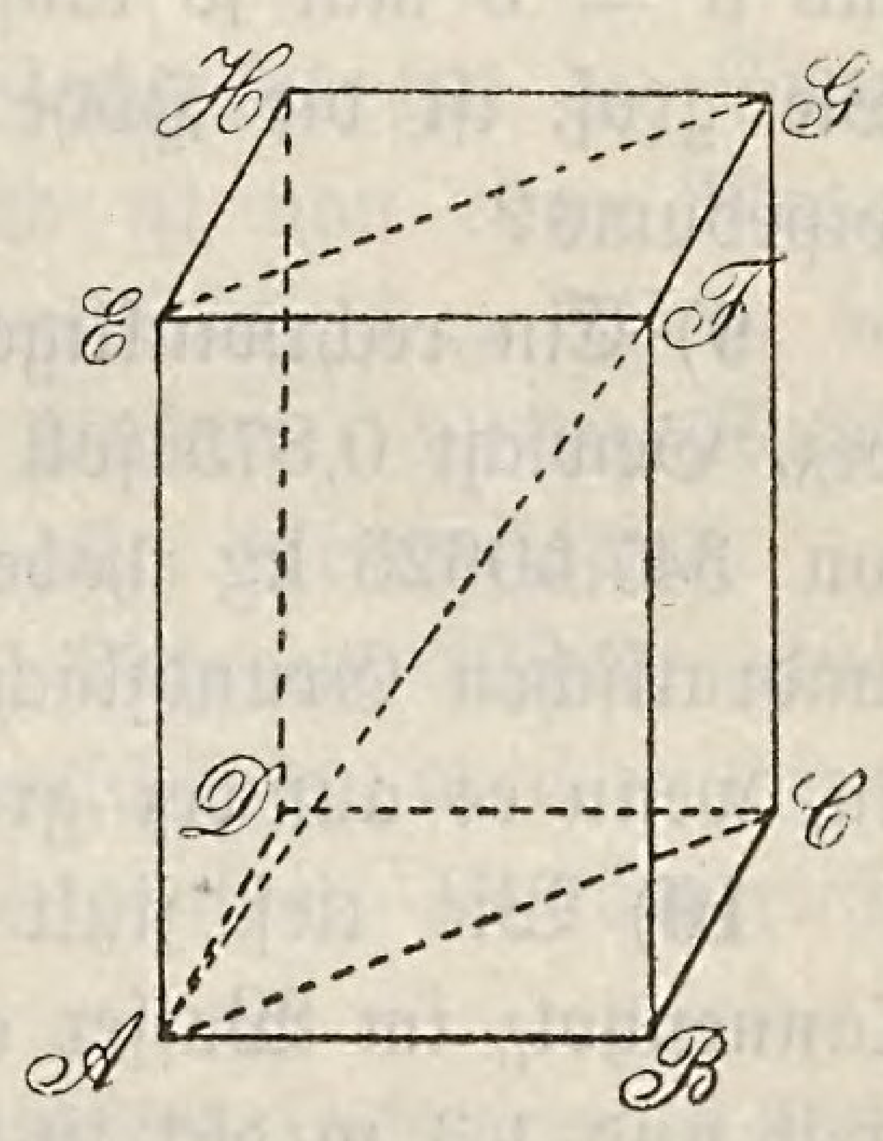
17) Eine Kiste von 1 m Länge und 0,6 m Breite wiegt 160 Pfund. Wie weit sinkt dieselbe im Wasser ein?

18) Ein Kasten von Kupferblech ist 50 cm lang, 40 cm breit und 30 cm hoch. Wie tief sinkt derselbe im Wasser ein, wenn 1 qcm 4 g wiegt?

Schriftlich.

1) Aus den drei in einer Ecke zusammentreffenden Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedums $a = 2{,}3$ cm, $b = 5$ cm und $c = 18$ cm soll berechnet werden: 1) der Inhalt K, 2) die Oberfläche O und 3) die Diagonalachse $AG = A_1$ desselben. Fig. 2.

Fig. 2.



2) Die Grundfläche eines Parallelepipedums enthält $a = 170{,}624$ qm und die eines andern mit ihm inhaltsgleichen Parallelepipedums $b = 53{,}32$ qm. Wie verhält sich die Höhe des ersteren zu der des zweiten?

3) Ein rechteckiges Zimmer ist 9 m lang, 6 m breit und 4 m hoch. 1) Wieviel Liter Sauerstoff *) befinden sich in demselben, wenn 2,3 cbm Raum für Möbel abgerechnet werden? 2) Wieviel Gramm sind dies **)? 3) Wie lange würde in diesem Raume für 20 Personen der zum Leben erforderliche Sauerstoff ausreichen, wenn kein Luftwechsel in demselben stattfände und ein erwachsener Mensch in 24 Stunden 746 g Sauerstoff verbraucht?

4) In einem Lokal, das einen kubischen Raum von 55,2 cbm faßt, ist eine Ventilationsvorrichtung angebracht; der nützliche Querschnitt der Ventilationsöffnung beträgt 0,0848 qm; die Geschwin-

*) In 100 Raumteilen Luft sind 21 Rtl. Sauerstoff enthalten.

**) 1 Liter Sauerstoff wiegt 1,4 g.

digkeit des abziehenden verbrauchten Luftstromes in der Ventilationsöffnung ist 108 m pro Minute; 1) wieviel beträgt das abgeführte Quantum Luft pro Minute; 2) pro Stunde; 3) ein wie vielmaliger Luftwechsel des das obige Lokal fassenden Luftquantums wird durch diese Ventilation ermöglicht?

5) Jemand will eine Mauer von $a = 15$ m Länge, $b = 0{,}3$ m Breite und $c = 2{,}24$ m Höhe aufführen lassen. Wieviel Ziegelsteine hat er dazu nötig, wenn jeder derselben $m = 0{,}3$ m lang, $n = 0{,}15$ m breit und $p = 0{,}07$ m dick ist?

6) Ein rechteckig behauener Körper, dessen spez. Gewicht 3 ist, wiegt 1340595 kg. Die Breite desselben ist 3 mal und die Länge 5 mal so groß, als dessen Höhe. Wie lang, breit und hoch ist derselbe?

7) Jemand hat einen viereckigen Kasten von 15,2813952 cbm Inhalt; welche Dimensionen hat ein anderer Kasten, der 10 mal so viel faßt und 3 mal so breit und 6 mal so lang als hoch ist?

8) Ein Parallelepipedum ist $m = 1{,}5$ mal so breit als hoch und $n = 3$ mal so lang als breit und enthält $c = 71{,}874$ cbm. Wie groß ist die Höhe x, Breite y und Länge z des Parallelepipedums?

9) Ein rechtwinkliges Parallelepipedum aus einem Stoff vom spez. Gewicht 0,875 soll bei einer Länge von 9,4 dm ein Gewicht von 347,50625 kg haben. 1) Wie groß wird die Kante seiner quadratischen Grundfläche? 2) Wie tief sinkt dasselbe im Wasser ein, wenn es auf der größten Grenzfläche schwimmt?

10) Wie tief sinkt ein rechtwinkliges Parallelepipedum von Tannenholz im Wasser ein, wenn dieser Körper 5,6 m lang, 0,9 m breit und 1,3 m dick ist und mit der breiten Seitenfläche auf das Wasser gelegt wird (spez. Gewicht = 0,45)?

11) Ein oben offener Kasten ist von außen gemessen $a = 17$ dm lang, $b = 6$ dm breit und $c = 4$ dm hoch; die Dicke jeder der vier Seitenwände beträgt $p = {}^1/_2$ dm und die des Bodens $q = {}^3/_4$ dm. Wie groß ist 1) die körperliche Masse und 2) der hohle Raum des Kastens?

12) Ein Wassertrog ist, von außen gemessen, 3,65 m lang, 1,12 m breit und 0,47 m tief. Jeder der beiden Backen hat eine Dicke von 0,15 m, jede Seitenwand ist 0,085 m stark und die Dicke des Bodens beträgt 0,07 m. Aus diesem Trog, in dem sich bereits

397 l Wasser befinden, fließen durch eine Röhre in je 6 Minuten 45 l aus; durch eine andere Röhre fließen in je 4 Minuten 51 l zu. Nach welcher Zeit wird der Wassertrog angefüllt sein, wenn die erste Röhre 12 Minuten früher geöffnet wird, als die zweite?

13) In einer Gemeinde, deren Schülerzahl nach dem fünfjährigen Durchschnitt 45 beträgt, soll ein neues Schulhaus gebaut werden. Die Schülerzahl wird in Rücksicht auf eine etwaige Steigerung der Bevölkerung um 20 % höher angenommen. Für das neue Lehrzimmer entwirft man nun folgendes Projekt. Als Flächenraum für einen Schüler nimmt man 0,65 qm an; der also berechneten Gesamtfläche werden noch für Gänge 4,90 qm zugeschlagen; als Luftraum für einen Schüler bringt man 2,4 cbm in Anrechnung, wobei die Fensternischen nicht berücksichtigt werden; die Länge des Lehrsaales soll das $1^3/_5$fache der Tiefe*) desselben betragen und die Gesamtfensterfläche, welche man auf 5 Fenster, jedes zu 1 m Breite, verteilen will, $^1/_5$ der Bodenfläche. Wie groß ist die Länge, Tiefe und Höhe dieses Lehrzimmers und wie hoch muß ein Fenster werden?

14) Ein Garten in der Form eines Rechteckes hat die Länge $l = 24$ m und die Breite $b = 15$ m und ist von einer Mauer umgeben, deren Höhe $h = 2,5$ m und deren Dicke $d = 0,3$ m beträgt. Aus diesen Angaben soll berechnet werden: 1) der Kubikinhalt K der Mauer und 2) die Größe F aller Seitenflächen.

15) Die Fläche F der inneren und äußeren Wände einer Mauer, welche ein rechteckiges Grundstück einschließt und $d = 0,9$ m dick ist, beträgt zusammen 1024 qm. Wie groß ist die körperliche Masse K dieser Mauer?

16) Die drei Dimensionen eines Rechteckers sind $a = 5,6$ m, $b = 4,2$ m und $c = 4,1$ m; wie groß sind die drei voneinander verschiedenen Diagonalebenen, die sich durch dasselbe legen lassen?

17) Länge, Breite und Höhe eines rechtwinkligen Parallelepipedums, dessen Oberfläche 2528 qm beträgt, verhalten sich wie 8 : 5 : 3; wie groß sind die Dimensionen?

18) Im nördlichen Eismeer sind schon sehr große schwimmende Eismassen beobachtet worden; wenn man nun annimmt, daß ein

*) Unter der Tiefe eines Zimmers oder Gebäudes versteht man die Größe der Entfernung der Thüre von der gegenüberstehenden Wandfläche.

solcher Eisberg eine rechteckige Gestalt hat und daß sich von ihm ein 1000 m langes, 200 m breites und 100 m hohes Stück außerhalb des Wassers befindet, so fragt es sich: 1) wie groß muß das Volumen des eingetauchten Teiles dieses Eisberges sein (spez. Gewicht des Eises = 0,9); 2) wie tief muß er eingetaucht sein und 3) welche Last würde derselbe tragen können, falls er durch dieselbe gerade eintauchen sollte?

19) Ein parallelepipedischer Körper ist bei 0° a m lang, b m breit und c m hoch; wie groß ist derselbe, wenn er um t° C. erwärmt wird und der lineare Ausdehnungskoefficient*) = k ist?

20) Die Oberfläche eines rechtwinkligen Parallelepipedums beträgt b = 432 qm, die Länge desselben übertrifft die Summe der Breite und Höhe um c = 7,5 m und die Diagonalachse desselben mißt a = 19,5 m. Wie lang, breit und hoch ist dieser Körper?

21) In einem rechtwinkligen Parallelepipedum ist die Diagonale der Grundfläche a, die der größeren Seitenfläche b und die der kleineren Seitenfläche c m lang. Welchen Inhalt hat jede dieser Flächen?

c) Das drei- und mehrseitige Prisma.

Mündlich.

1) Die Grundfläche eines Prismas ist ein Dreieck von 1,4 m Grundlinie und 0,8 m Höhe. Wie groß ist das Volumen dieses Prismas, wenn die Höhe desselben 2,5 m beträgt?

2) Die Höhe eines Prismas beträgt 0,8 m und die Grundfläche desselben bildet ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 0,4 m und 0,66 m messen. Wie groß ist der Inhalt desselben?

Schriftlich.

1) Ein dreiseitiges Prisma ist h = 5,6 m hoch, und seine Grundfläche bildet ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten a = 3,5 und b = 2,1 m lang sind; 1) wieviel beträgt sein Kubikinhalt K; 2) wie lang ist die Kante k eines Würfels, welcher gleichen Inhalt mit diesem Prisma hat?

2) Alle Kanten eines geraden, regulären, dreiseitigen Prismas sind a = 12,4 m lang; wie groß ist der Kubikinhalt K desselben?

---

*) Der lineare Ausdehnungskoefficient eines Körpers ist die Zahl, welche ausdrückt, um wieviel die Längeneinheit desselben sich ausdehnt, wenn die Wärme um einen Grad zunimmt.

3) Die Höhe eines geraden dreiseitigen Prismas beträgt h = 8,2 m und jede Grundkante mißt a = 2,4 m; wie groß ist 1) der körperliche Inhalt K und 2) die gesamte Oberfläche O desselben?

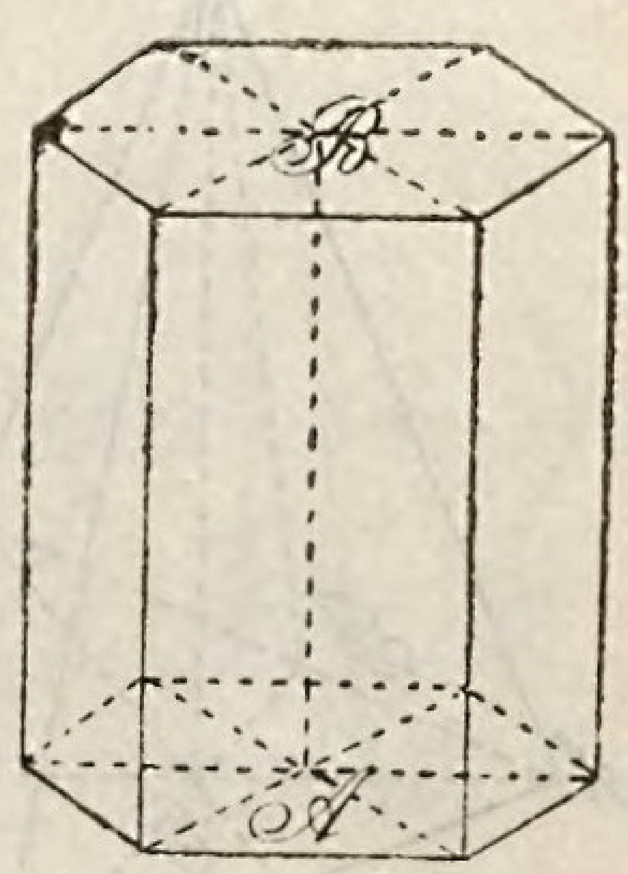
4) Ein gerades Prisma, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck bildet, ist h = 5,4 m hoch und hat den körperlichen Inhalt K = 45,34 cbm; wie groß ist die gesamte Oberfläche O desselben?

5) Die gesamte Oberfläche O eines geraden dreiseitigen Prismas mit regulärer Basis beträgt 313,856 qm und die Höhe desselben h = 25 m. Wie groß ist eine Grundkante dieses Prismas? (Anhang IV.)

6) Der Kubikinhalt K eines geraden dreiseitigen Prismas mit regulärer Basis beträgt 35,073 cbm und die Höhe desselben h = 25 m. Wie groß ist die Seite x der Grundfläche?

7) Wie groß ist der körperliche Inhalt K und die gesamte Oberfläche O eines geraden sechsseitigen Prismas, wenn die Seite der regulären Basis a = 2,5 m und die Höhe des Prismas h = 8,3 m beträgt? Fig. 3.

Fig. 3.



8) Die Oberfläche O eines geraden sechsseitigen Prismas mit regulärer Basis beträgt 142,61436 qm und die Länge einer Grundkante a = 2,1 m. Wie groß ist die Höhe dieses Prismas?

9) Ein Prisma enthält K = 41,568 cbm und hat zur Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck. Wie groß ist die Höhe h des Prismas, wenn sie sich zur Grundkante wie m : n = 3 : 2 verhält?

10) Ein sechsseitiges und ein vierseitiges regelmäßiges Prisma haben die gleiche Grundkante a = 4 m und dieselbe Höhe h = 5 m. Es soll das Verhältnis 1) der Kubikinhalte und 2) der Oberflächen beider Prismen zu einander angegeben werden.

§ 13. Die Pyramide.

a) Die dreiseitige Pyramide.

Mündlich.

1) Die Grundfläche einer Pyramide beträgt 6,4 qm (12,25 qm) und die Höhe 12 m (1,8 m). Welches Volumen hat dieselbe?

2) Der Inhalt einer Pyramide beträgt 187,5 cbm (207 cbm) und die Grundfläche 37,5 qm (23 qm). Wie hoch ist dieselbe?

3) Eine Pyramide hat 68,85 cbm Inhalt und ist 16,2 m hoch. Wie groß ist die Grundfläche derselben?

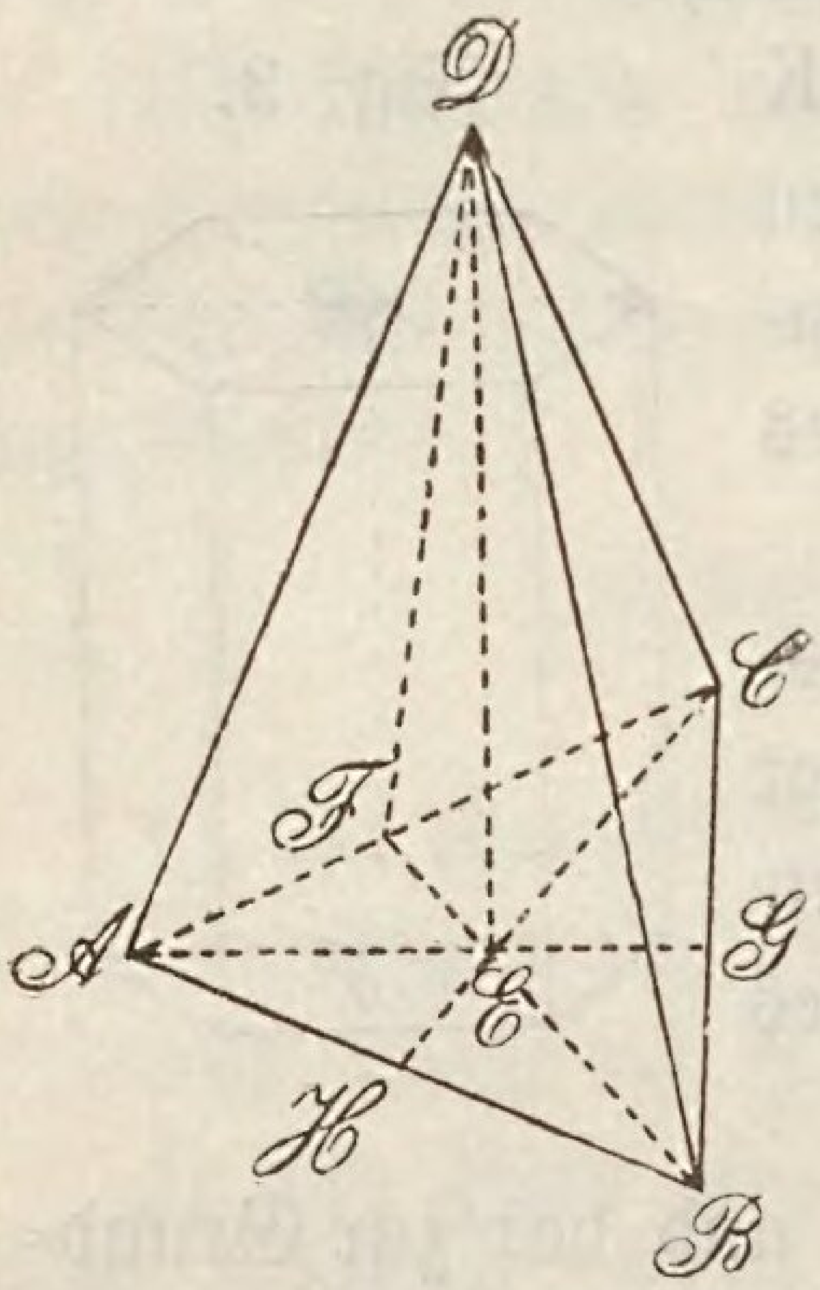
4) Wie groß ist die Oberfläche einer dreiseitigen Pyramide, wenn jede Kante derselben 4 m lang ist?

Schriftlich.

1) Aus dem Inhalt K = 33,048 cbm und der Höhe h = 8,1 m einer Pyramide ihre Grundfläche g zu berechnen.

2) Die Höhe einer geraden dreiseitigen Pyramide mit regulärer Basis beträgt h = 12,3 m und ihr körperlicher Inhalt K = 28,4048 cbm. Wie groß ist eine Seite ihrer Grundfläche?

Fig. 4.



3) Die Seitenkante einer geraden dreiseitigen Pyramide beträgt a = 6 m, und die Seite der regulären Basis b = 4 m. Wie groß ist: 1) die gesamte Oberfläche O, 2) die Höhe h und 3) der Inhalt K dieser Pyramide? Fig. 4. (Anhang IV.)

4) Von einer geraden dreiseitigen Pyramide mit regulärer Basis mißt die Grundkante a = 6,2 m, und die Höhe h ist doppelt so groß als die Grundkante. Wie groß ist die Oberfläche O dieser Pyramide?

5) Ein Denkmal aus Granit hat die Gestalt einer geraden dreiseitigen Pyramide mit regulärer Basis; die Grundkante derselben ist 2,1 m, und ihre Höhe beträgt 16,2 m; wie schwer ist diese Pyramide (spez. Gewicht des Granits = 2,5)?

b) Die vier- und mehrseitige Pyramide.

Mündlich.

1) Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Quadrat von 5,6 m Umfang. Wie groß ist der Inhalt dieser Pyramide, wenn ihre Höhe 7,5 m beträgt?

2) Eine quadratische Pyramide hat Dreiecke von 1,2 m Grundlinie und 2,6 m Höhe als Seitenflächen. Wie groß ist die Oberfläche derselben?

3) Ein eisernes massives Denkmal hat die Form einer qua-

dratischen Pyramide. Wie schwer ist dasselbe, wenn die Kante der Grundfläche 0,6 m, die Höhe des Denkmals 1,5 m mißt und das spez. Gewicht des Eisens 7,5 beträgt?

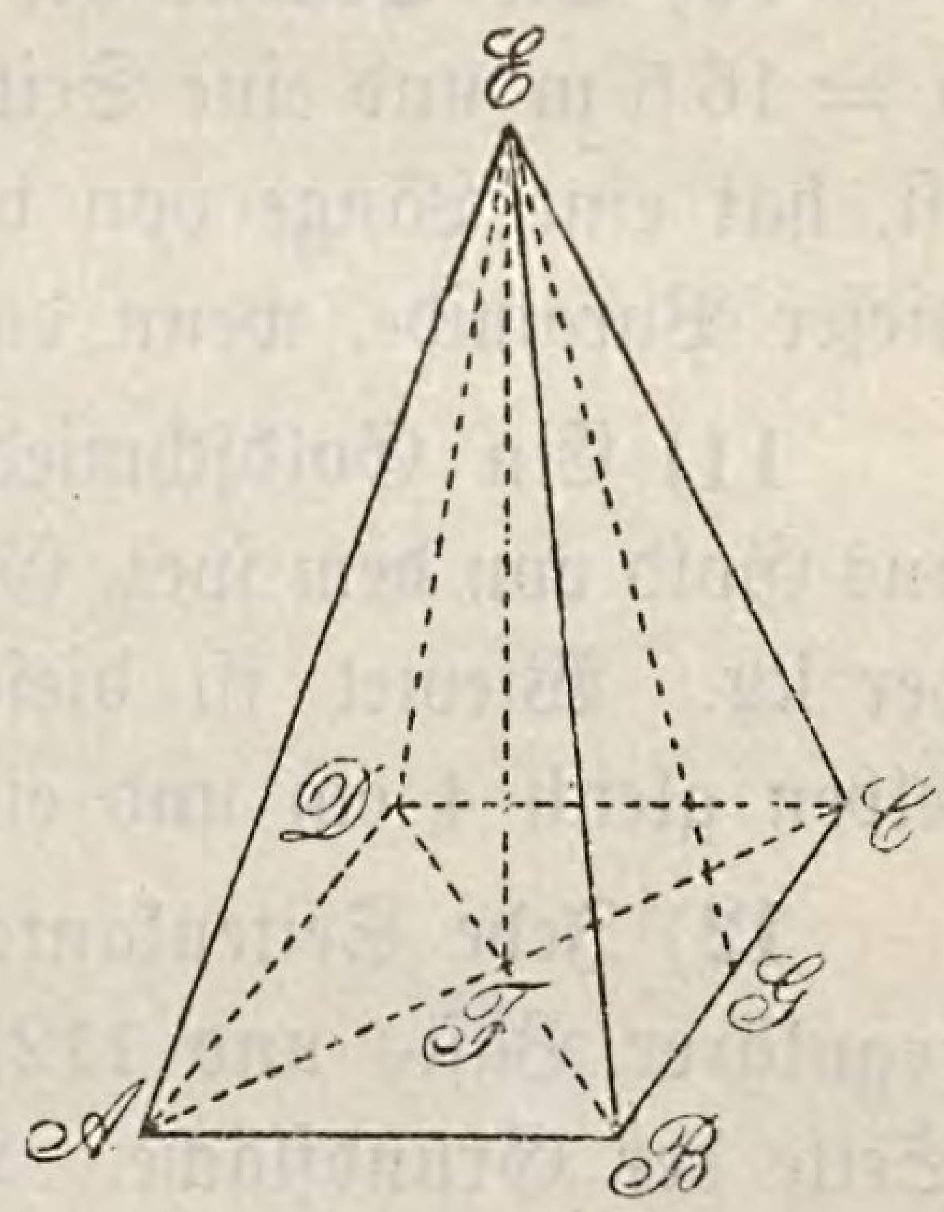
4) Der Kubikinhalt einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide beträgt 5,625 cbm und ihre Höhe mißt 2,7 m. Wie groß ist die Grundkante?

5) Der Mantel einer geraden quadratischen Pyramide beträgt 17,28 qm und die Höhe eines Seitendreiecks 3,6 m. Wie groß ist die Grundfläche derselben?

Schriftlich.

1) Wie groß ist: 1) die gesamte Oberfläche O, 2) die Höhe h und 3) der körperliche Inhalt K einer geraden Pyramide mit quadratischer Basis, wenn die Grundkante b = 0,9 m und die Seitenkante a = 2,4 m mißt? Fig 5.

Fig. 5.



2) Aus einem Sandsteine in der Form eines geraden Prismas mit quadratischer Basis soll eine gerade Pyramide mit derselben Grundfläche und Höhe gehauen werden. Wie schwer wird diese Pyramide werden, wenn die Grundkante des Sandsteinprismas 4,5 m, die Länge einer Seitenkante 5,6 m und das spez. Gewicht des Sandsteins 2,6 ist?

3) Jede Kante einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide mißt a = 12 m. Wie groß ist 1) der körperliche Inhalt K und 2) die gesamte Oberfläche O dieser Pyramide?

4) Wie groß ist die Oberfläche O einer geraden Pyramide mit quadratischer Basis, wenn die Höhe dieser Pyramide h = 5,1 m und ihre Grundkante a = 6,4 m beträgt?

5) Die Höhe h einer geraden Pyramide mit quadratischer Basis beträgt 4 m und ihre gesamte Oberfläche O = 96 qm. Wie groß ist eine Seite a der Basis?

6) Die Seiten= und Grundkante einer geraden vierseitigen Pyramide mit quadratischer Basis und einer Oberfläche von 756 qcm verhalten sich zu einander wie 5 : 6; wie groß sind jene Kanten?

7) Eine gerade Pyramide aus einem Stoffe vom spez. Gewicht s = 6,2 hat bei einer Höhe h = 3,58 m ein Gewicht von p = 2663,52 kg. Wie groß ist die Kante a ihrer quadratförmigen Grundfläche?

8) Eine Pyramide aus Gußeisen, dessen spez. Gewicht 7,6 ist, wiegt 9849,6 kg. Welche Höhe hat dieselbe, wenn ihre Grundfläche ein Quadrat von 0,9 m Seitenlänge ist?

9) Wie groß ist 1) der körperliche Inhalt K und 2) die gesamte Oberfläche O einer geraden Pyramide, deren Höhe h = 6,8 m beträgt und deren Basis ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite a = 3,4 m ist?

10) Die Seitenkante einer geraden Pyramide aus Granit mißt a = 16,5 m und eine Seite der Basis, die ein regelmäßiges Sechseck ist, hat eine Länge von b = 4 m. Wie groß ist das Gewicht p dieser Pyramide, wenn das spez. Gewicht des Granits s = 2,8 ist?

11) Ein Goldschmied gießt eine sechsseitige gerade Pyramide aus Gold von dem spez. Gewicht 19,3 und dem Werte von 2700 *M* per kg. Wieviel ist diese Pyramide wert, wenn die Höhe derselben gleich 4 cm und eine Seite der Basis gleich 2 cm ist?

12) Jede Seitenkante einer geraden sechsseitigen Pyramide mit regulärer Basis und 112,4 cbm Inhalt ist doppelt so lang als die Seite der Grundfläche. Wie groß sind diese Dimensionen?

13) Eine Pyramide aus Tannenholz, dessen spez. Gewicht s = 0,4 ist, hat zur Grundfläche ein Quadrat von b = 4,6 m Länge und die Höhe h = 8,1 m. Aus derselben wird eine andere Pyramide herausgeschnitten und der hohle Raum mit Blei vom spez. Gewicht S = 11,35 ausgefüllt. Der ganze Körper wiegt jetzt p = 224,3328 Tonnen. Welches Volumen V hat die aus Blei bestehende Pyramide?

c) Die abgestumpfte Pyramide.

Mündlich.

1) Eine Pyramide wird durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten; der Abstand der Schnittfläche von der Spitze beträgt 2,4 m (2,6 m) und der der Grundfläche 3,6 m (6,5 m). Wie verhalten sich die Inhalte beider Flächen?

2) Die Grundfläche einer 1,2 m hohen Pyramide beträgt 36 qm.

Wie groß ist ein der Grundfläche paralleler Durchschnitt, dessen Abstand von der Spitze 0,7 m beträgt?

3) Die Grundfläche einer 12 cm hohen Pyramide beträgt 28,8 qcm. Ein zu derselben paralleler Durchschnitt soll 5 qcm betragen. In welchem Abstand von der Spitze muß derselbe genommen werden?

4) Eine quadratische abgestumpfte Pyramide ist 15 m hoch und die Seiten der Grundflächen sind 5 m und 4 m lang. Welches Resultat ergibt sich als Kubikinhalt dieses Stumpfes: **a)** wenn man aus den Angaben die ganze Höhe der Pyramide sucht und dann vom Inhalt derselben den der Ergänzungspyramide subtrahiert? **b)** Wenn man nach der Formel $v = \frac{1}{3} h (G + g + Gg)$ verfährt? **c)** Wenn man den Pyramidenstumpf als Prisma berechnet, dessen Grundflächenkante das arithmetische Mittel aus den Endkanten des Stumpfes ist, nämlich $v = ((5+4)^1/_2)^2 15$? **d)** Wenn man denselben ebenfalls als Prisma betrachtet, als dessen Grundfläche aber das arithmetische Mittel aus den beiden Endflächen des Stumpfes annimmt? **e)** In welchen Fällen ergibt sich das Resultat genau? **f)** Wie läßt sich das auf die beiden letzteren Weisen erhaltene Resultat berichtigen?

5) Ein vierkantiger eichener Balken, der unten 0,5 m breit und 0,4 m dick und oben 0,3 m breit und 0,2 m dick ist, hat eine Länge von 5 m. Wieviel ist derselbe wert, wenn das cbm 27 *M* kostet (annähernd)?

6) Die obere Umgrenzung eines Bassins bildet ein Quadrat mit der Seite 15 m, die Seitenwände desselben sind gleichmäßig abgedacht, und sein Boden ist ebenfalls ein Quadrat, dessen Seite 5 m mißt. Wieviel hl Wasser faßt dasselbe, wenn seine Tiefe 2,70 m beträgt.

7) Ein Gefäß soll 845 Liter fassen und die Form einer abgestumpften Pyramide mit quadratischen Grundflächen erhalten. Welche Höhe muß dasselbe bekommen, wenn die untere Grundfläche im Lichten 7 dm und die obere 8 dm lang werden soll?

8) **a)** Nach welchem Gesetz nimmt die Stärke der Beleuchtung ab? **b)** Wie läßt sich dies geometrisch beweisen? **c)** Wieviel mal so wenig hell ist ein Schirm, der aus einer Entfernung von 4 m von einer Lichtquelle in eine Entfernung von 8 m von derselben gebracht wird?

9) Ein quadratisches Brettchen von 1 dm Seitenlänge ist von einer lotrechten Wand 3 dm entfernt und parallel zu dieser; vor dem Brettchen befindet sich in einer Entfernung von 1,5 dm eine brennende Kerze; dieselbe ist so aufgestellt, daß ihre Mitte von jeder Ecke des Brettchens gleichweit absteht. Wie groß ist die Fläche des Schattens, welchen das Brettchen auf die lotrechte Wand wirft?

Schriftlich.

1) Aus den beiden parallelen Grundflächen G, g und der Höhe h einer abgestumpften Pyramide soll eine Formel zur Berechnung des Volumens V derselben entwickelt werden. (Anhang III.)

2) Welchen Ausdruck erhält man für den Kubikinhalt einer abgestumpften vierseitigen Pyramide, wenn man die Seiten der quadratischen Grundflächen mit S und s und die Höhe des Stumpfes mit h bezeichnet?

3) Ein Denkmal aus Granit hat die Gestalt eines geraden vierseitigen Pyramidenstumpfes. Die Seite der Grundfläche beträgt 3,6 m, die Seite der Deckfläche 0,8 m und der senkrechte Abstand beider Flächen 15,5 m. Wie schwer ist dieses Denkmal, wenn das spez. Gewicht des Granits = 2,9 ist?

4) Eine Wassergrube hat die Form einer abgestumpften quadratischen Pyramide. Die Seitenlänge der Öffnung beträgt 3,3 m, die des Bodens 2,5 m und der Inhalt derselben 118,0635 cbm. a) Wie tief ist dieselbe? b) Wie lange braucht ein Arbeiter, um sie zu füllen, wenn derselbe alle 5 Minuten 314 Liter Wasser in die Grube zu fördern vermag?

5) Der Kubikinhalt einer abgestumpften Pyramide beträgt 286 ccm und deren Höhe 0,33 m. Wie groß ist die Grund- und Deckfläche, wenn erstere 9mal so viel Inhalt hat als letztere?

6) Ein Wassergefäß hat die Form einer abgestumpften Pyramide mit quadratischen Grundflächen. Die Seite der unteren Grundfläche ist innen 0,82 m, die der oberen 1,5 m lang, und die Tiefe des Gefäßes beträgt 1,8 m. a) Wieviel Liter Wasser gehen in dieses Gefäß? b) Wieviel wiegt dasselbe? c) Wie groß ist der Bodendruck? d) Wie groß würde er sein, wenn man das Gefäß mit der größeren Deckfläche aufsetzte?

7) Ein pyramidaler Balken aus Eichenholz ist unten 0,32 m breit und dick, oben 0,24 m und seine Länge beträgt 6,3 m. Wieviel cbm enthält derselbe? (Auf dreierlei Art auszuführen.)

8) Ein Schornstein hat die Gestalt eines geraden vierseitigen Pyramidenstumpfes mit quadratischen Grundflächen. Die äußere Kante des Fundaments ist 1,6 m und die innere 0,8 m lang; die Länge der äußeren Kante an der oberen Fläche dagegen beträgt 0,6 m und die der inneren 0,3 m; der Schornstein ist 12,8 m hoch. **a)** Wie groß ist der körperliche Inhalt des Mauerwerks? **b)** Wie groß ist das Gewicht des letzteren, wenn es aus Backsteinen, deren spez. Gewicht 1,6 ist, besteht? **c)** Welchen Wert haben die Backsteine dieses Schornsteins, wenn man das Gewicht eines Backsteins = $1^1/_2$ Pfund setzt und den Wert von 1000 Backsteinen zu 36 ℳ annimmt?

9) Die Grundfläche eines Pyramidenstumpfes ist G qm, die Deckfläche desselben g qm groß und seine Höhe beträgt h m. Wie groß ist die Ergänzungspyramide?

10) Wie groß ist die Oberfläche eines geraden vierseitigen Pyramidenstumpfes mit quadratischen Grundflächen, wenn die Seite der größeren Basis 6,4 m, die der kleineren 4,2 m lang ist und die Höhe einer Seitenfläche 12,1 m beträgt?

11) Es soll die Oberfläche eines geraden sechsseitigen Pyramidenstumpfes mit regelmäßigen Grundflächen berechnet werden; die Seiten der letzteren sind 4,8 m und 2,6 m lang und die Höhe einer Seitenfläche mißt 6,4 m.

12) Welches Volumen hat eine abgestumpfte vierseitige Pyramide mit quadratischen Grundflächen, wenn die Seiten der letzteren a = 4 m und b = 2,5 m lang sind und jede der Seitenkanten c = 6 m mißt?

13) Eine abgestumpfte quadratische Pyramide aus Sandstein (spez. Gewicht s = 2,5) wiegt p = 462,5 kg, ist h = 1,5 m hoch und hat eine a = 4 dm lange Grundkante. Wie groß ist die Kante x der Deckfläche?

14) Eine abgestumpfte, gerade, quadratische Pyramide aus Granit, dessen spez. Gewicht 2,8 ist, wiegt 71089,2 kg; die Höhe derselben beträgt 2,7 m und die Kante der unteren Grundfläche ist um 11 dm länger als die der oberen. Wie lang sind die Kanten dieses Körpers?

15) Wie groß ist die Oberfläche O eines geraden vierseitigen Pyramidenstumpfes von h = 4,2 m Höhe, wenn die Seite der

quadratischen Grundfläche S = 6,2 m und die der Deckfläche s = 4,5 m lang ist?

16) Wie groß ist die Oberfläche O eines geraden sechsseitigen Pyramidenstumpfes, wenn die Kante der Grundfläche b = 4,6 m, die der Deckfläche a = 2,4 m lang ist und eine Seitenkante c = 8,2 m mißt?

17) Ein gerader Pyramidenstumpf, dessen Höhe h = 8,1 m ist, hat zu Grundflächen gleichseitige Dreiecke, deren Seiten a = 6 m und b = 4 m sind. Wie groß ist 1) der Inhalt K und 2) die gesamte Oberfläche O dieses Stumpfes?

18) Ein gerader Pyramidenstumpf hat gleichseitige Dreiecke zu Grundflächen; die Seite der unteren ist a = 6,2 m, die Seite der oberen b = 4 m lang und eine Seitenkante mißt c = 8,4 m. Wie groß ist 1) der Inhalt K und 2) die ganze Oberfläche O dieses Stumpfes?

d) Das regelmäßige Tetraeder und Oktaeder.

1) Aus der Kante a = 4,2 m eines regelmäßigen Tetraeders soll berechnet werden 1) die Höhe h, 2) der Inhalt K und 3) die Oberfläche O desselben. Fig. 6.

2) Der kubische Inhalt eines regelmäßigen Tetraeders beträgt K = 7,540862 cbm; wie lang ist dessen Kante a?

3) Die Oberfläche eines regelmäßigen Tetraeders beträgt O = 36,64912 qm. Wie lang ist seine Kante a?

4) Die Höhe h eines regulären Tetraeders beträgt 5,4 m. Wie groß ist der Kubikinhalt K desselben?

5) Aus der Kante a = 3,2 m eines regelmäßigen Oktaeders soll berechnet werden 1) der Kubikinhalt K und 2) die Oberfläche O desselben. Fig. 7.

Fig. 6.

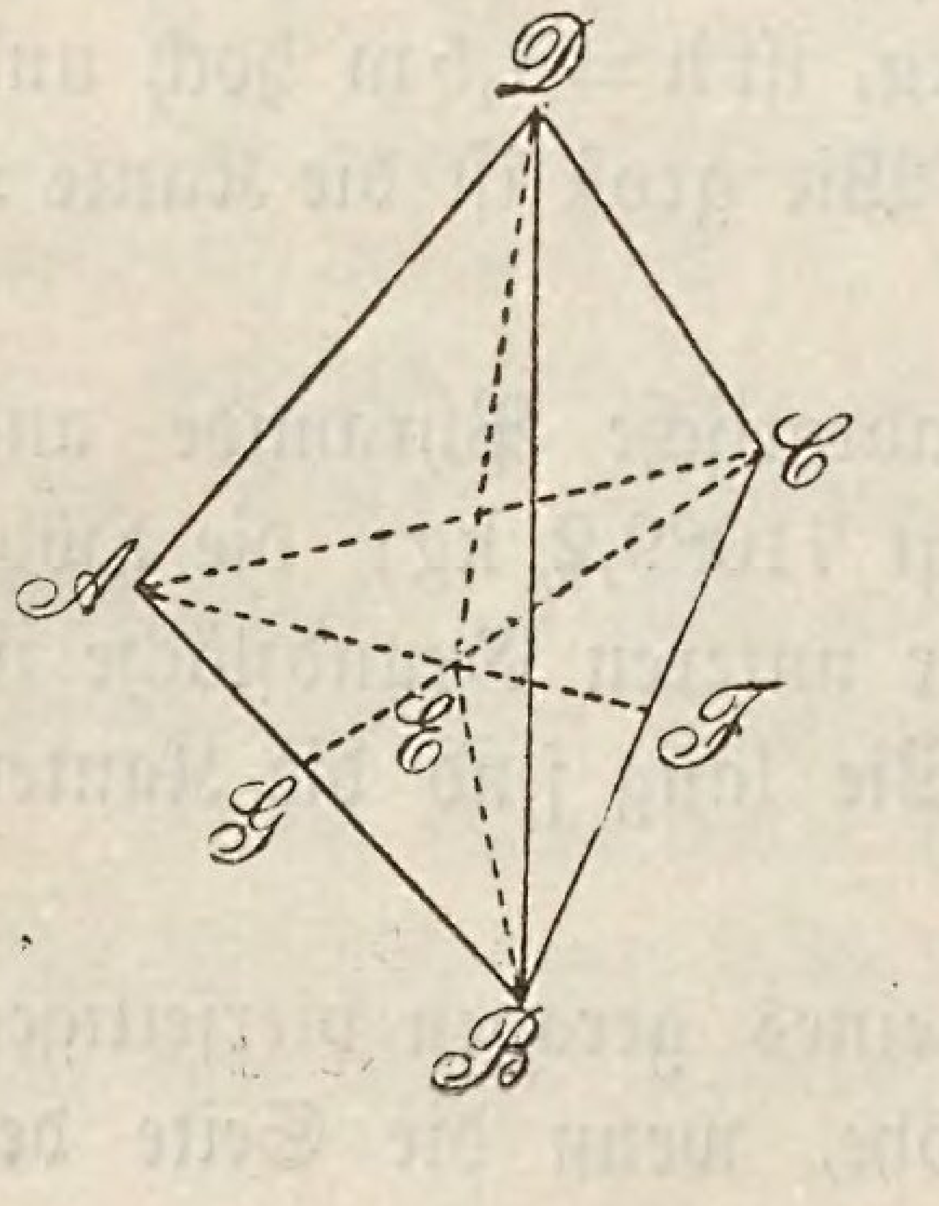
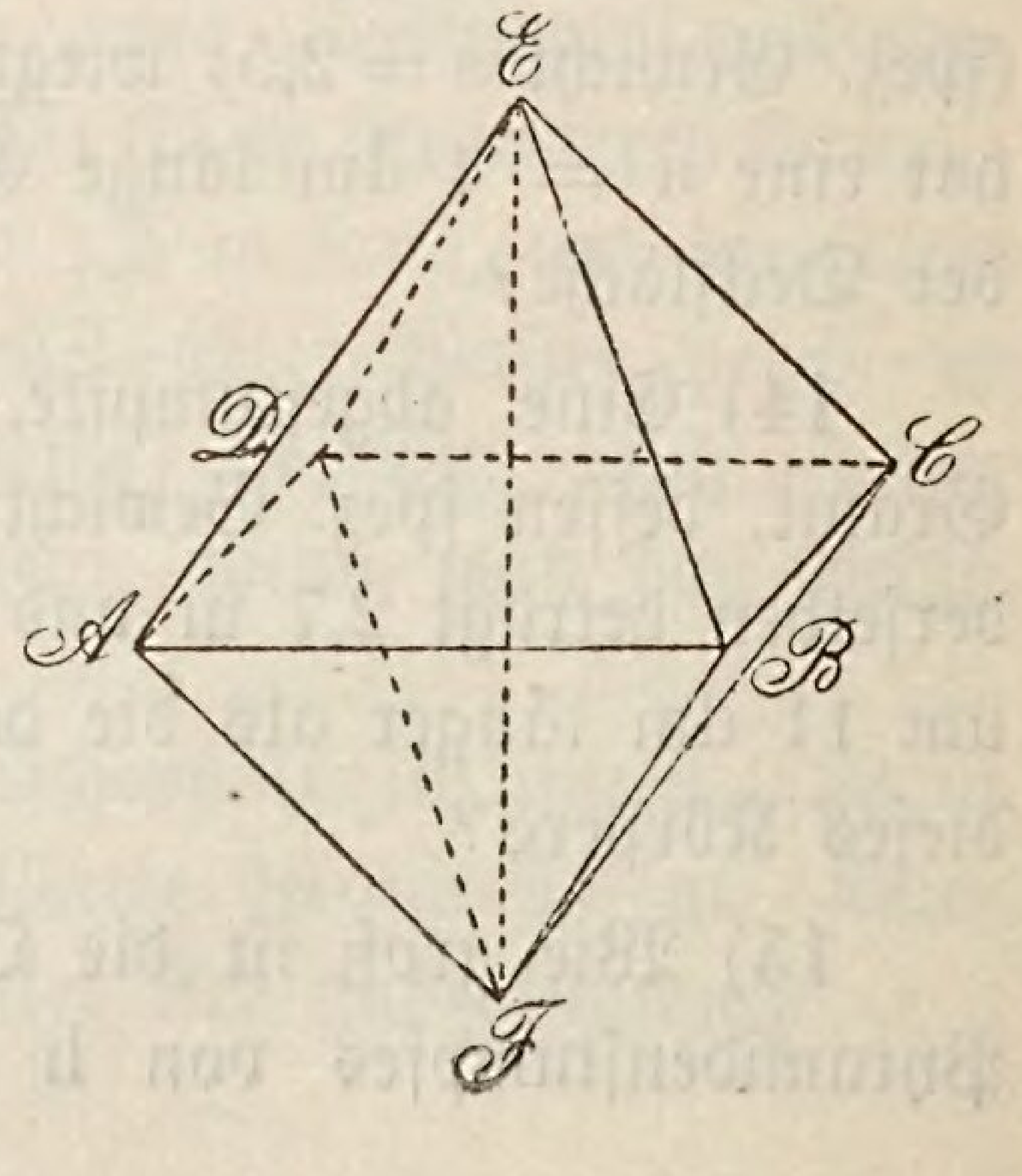


Fig. 7.



6) Die Oberfläche eines regelmäßigen Oktaeders beträgt 35,47136 qm. Wie groß ist dessen Kante a?

e) **Prismatische Abschnitte und Prismatoid** *).

1) Die drei parallelen Kanten eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas sind a = 6 m, b = 8 m und c = 4,9 m lang; der Inhalt des senkrechten Durchschnittsdreieckes beträgt f = 18 qm. Wie groß ist der Kubikinhalt K dieses Körpers?

2) Die drei parallelen Kanten eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas sind a = 3,4 m, b = 4,4 m und c = 3,6 m lang. Die Grundlinie des senkrechten Durchschnittsdreieckes mißt g = 2,4 m und die Höhe desselben h = 2,2 m. Wie groß ist der Kubikinhalt K desselben?

3) Die drei parallelen Kanten eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas sind a = 5,1 m, b = 7,3 m und c = 8 m lang; die drei Seiten des senkrechten Durchschnittsdreieckes betragen m = 5 m, n = 12 m und p = 13 m. Wie groß ist der Kubikinhalt K dieses Körpers?

4) Die Seiten der einen Grundfläche eines Pontons sind

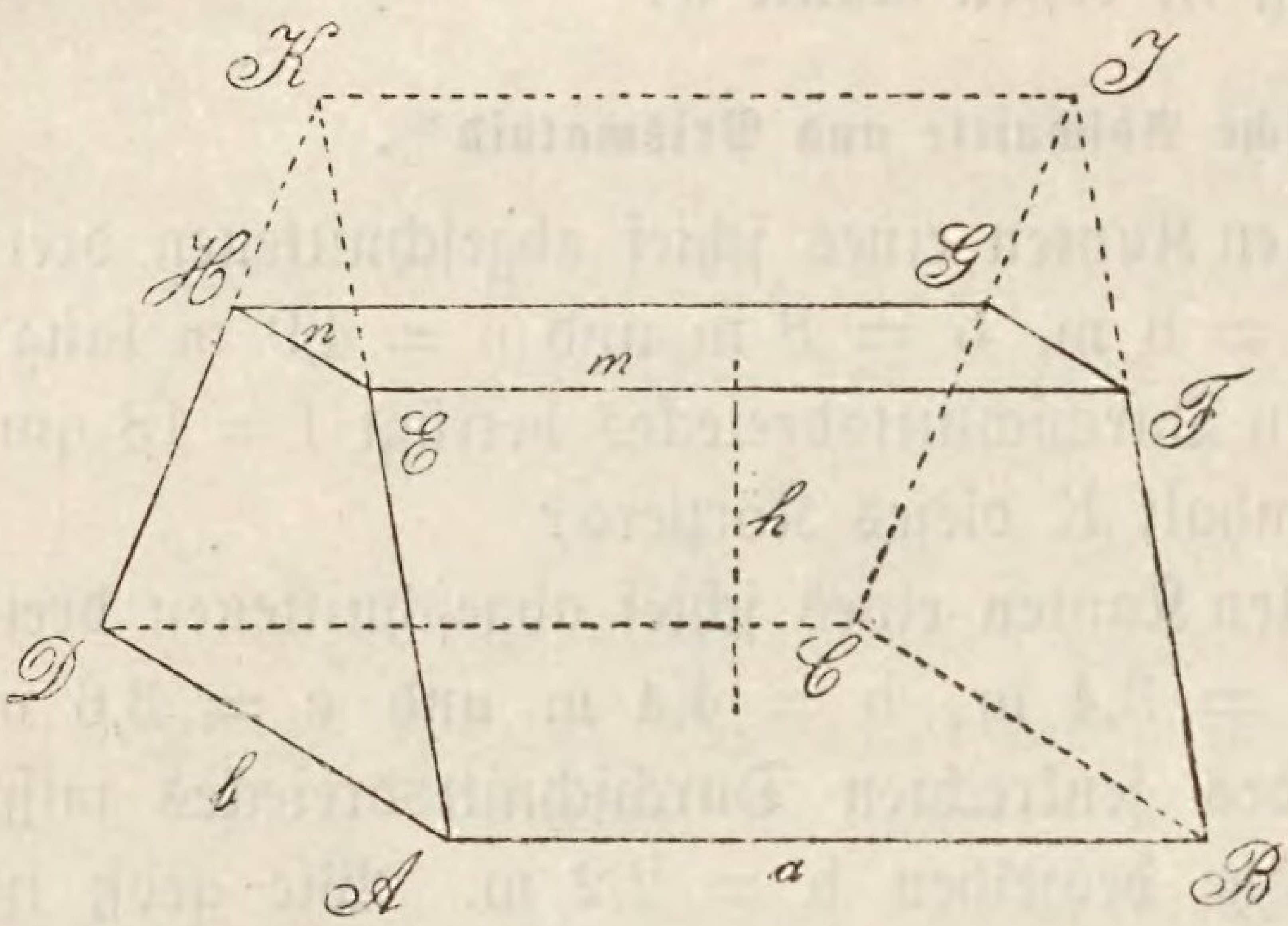
---

*) Ein Körper, welcher von zwei parallelen Vielecken als Grundflächen und außerdem von Trapezen, Parallelogrammen oder Dreiecken begrenzt wird, heißt ein Prismatoid. Sind die beiden Grundflächen Polygone von gleicher Seitenzahl und sind zudem je zwei gegenüberliegende Seiten derselben zu einander parallel, so heißt das Prismatoid noch insbesondere ein Obelisk, und zwar nach der Zahl der Seiten der Grundflächen ein drei-, vier- u. s. w. seitiger Obelisk. Der Mantel eines solchen wird im allgemeinen von Trapezen gebildet. Ein Obelisk, dessen Grundflächen Rechtecke sind, führt den Namen Ponton. Ein Obelisk, dessen Grundflächen kongruent sind, ist ein Prisma; sind sie ähnlich, so ist er ein Pyramidenstumpf. Prismen, abgekürzte Pyramiden und Obelisken sind nur besondere Arten des Prismatoids.

Über den Inhalt desselben lehrt die Stereometrie: der Kubikinhalt eines Prismatoids ist gleich dem Kubikinhalt einer Pyramide, welche mit dem Prismatoid einerlei Höhe hat, deren Grundfläche aber gleich ist der Summe aus dem arithmetischen Mittel der beiden Grundflächen und dem doppelten Inhalte des mittleren Durchschnitts des Prismatoids. Sind G und g die Grundflächen, H die Höhe und M die mittlere Durchschnittsfläche des Prismatoids, so ist $K = \frac{1}{3}H . [(G + g)\frac{1}{2} + 2M]$.

Die antiken Obelisken sind hohe, vierseitige Säulen, welche gegen die Spitze zu sich verjüngen (abgestumpfte Pyramiden), und, auf niedriger Basis (Plinthe)

Fig. 8.



a = 9,5 und b = 7,75; die ähnlich liegenden Seiten der anderen Grundfläche dagegen m = 5,5 und n = 11,25 Längeneinheiten; die Höhe h des Pontons d. h. die senkrechte Entfernung beider Grundflächen voneinander, beträgt 8 solcher Längeneinheiten. Welchen Kubikinhalt hat der Ponton? Fig. 8.

5) Ein Damm, welcher die Form eines Pontons hat, ist 2,5 m hoch; die untere Grundfläche ist 54 m lang und 5,2 m breit, die obere 51 m lang und 3,5 m breit. Wie groß ist der Kubikinhalt desselben?

6) Eine Fähre in der Gestalt eines Pontons hat als Boden ein Rechteck, dessen Länge a = 6 m und dessen Breite b = 3 m beträgt. Die auf der Längenseite der Grundfläche stehenden Seitenwände sind vertikale Trapeze, deren obere Parallelseiten c = 9 m lang sind und deren Höhe h = 1,8 m beträgt. Welche Last L wird dieses Fahrzeug laden können, wenn es nur d = 1,2 m tief gehen soll und selbst schon ein Gewicht von p = 5 t hat?

§. 14. Der Cylinder.

a) Der massive Cylinder.

Mündlich.

1) Der Radius der Grundfläche eines Cylinders beträgt 5 m und seine Höhe mißt 8,5 m; wie groß ist der Mantel und das Volumen desselben?

---

stehend, oben mit einer kurzen Pyramide abschließen. Die Obelisken, welche besonders im alten Ägypten zu monumentalen Zwecken errichtet wurden, bestehen meistens aus einem einzigen Stein (Monolithe, Granit von Assuan) und sind in der Regel mit Hieroglyphen bedeckt. Unter den römischen Kaisern wurden mehrere nach Alexandrien und Rom geschafft. („Nadel der Kleopatra", 21,6 m hoch; Obelisk vor der Peterskirche in Rom $25^1/_2$ m; Obelisk auf dem Lateranplatz zu Rom, $45^1/_2$ m.)

2) Wie groß ist die gesamte Oberfläche eines geraden Cylinders, wenn der Radius der Grundfläche 4 m und seine Höhe 6,5 m mißt?

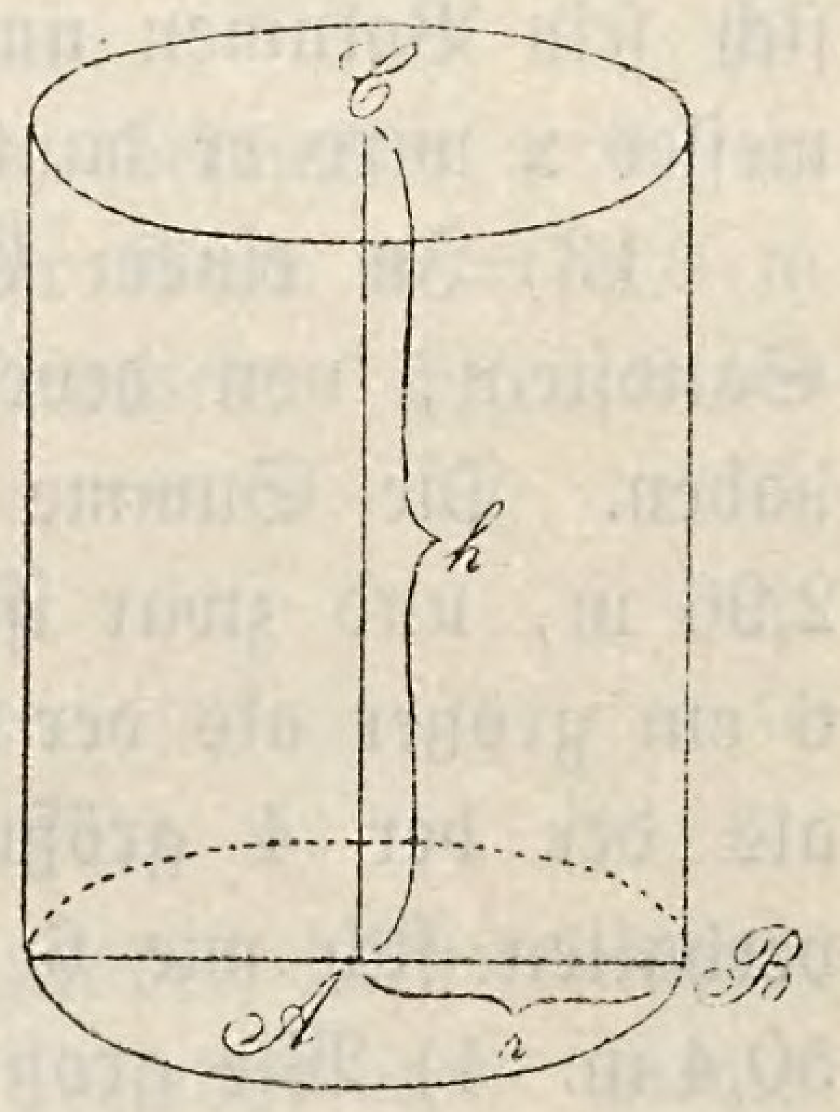
3) Die gesamte Oberfläche eines geraden Cylinders beträgt 87,92 qm und der Durchmesser der Basis mißt 4 m. Wie groß ist die Höhe desselben?

4) Wie groß ist der Auftrieb eines Holzcylinders von 20 cm Höhe und 5 cm Radius in Weingeist, dessen spez. Gewicht 0,8 beträgt?

5) Wie groß ist die Steigkraft dieses Cylinders in Wasser, wenn das spez. Gewicht des Holzes 0,4 beträgt?

Schriftlich.

Fig. 9.



1) Von einem Cylinder ist die Höhe h = 5,2 m und der Radius r = 3,4 m der Grundfläche gegeben. Wie groß ist 1) der Mantel M, 2) die Oberfläche O und 3) der Kubikinhalt K dieses Cylinders? Fig. 9.

2) Von einem Cylinder ist die Höhe h = 6,5 m und der Umfang seiner Grundfläche p = 10,048 m gegeben. Wie groß ist 1) dessen Oberfläche O und 2) Kubikinhalt K?

3) Aus der Höhe h = 8,2 m eines Cylinders und dem Durchmesser d = 3,1 m seiner Grundfläche soll berechnet werden 1) der Mantel M, 2) die Oberfläche O und 3) der Kubikinhalt K desselben.

4) Die Höhe eines Cylinders ist h = 4,2 m und der Kubikinhalt desselben K = 58,15908 cbm. Wie groß ist dessen gesamte Oberfläche O?

5) Der körperliche Inhalt eines gleichseitigen Cylinders beträgt K = 169,56 cbm. Wie groß ist dessen Mantel M?

6) Die gesamte Oberfläche eines geraden Cylinders ist O = 87,92 qm und der Durchmesser der Basis d = 4 m. Wie groß ist die Höhe desselben?

7) Der Kubikinhalt eines geraden Cylinders beträgt K = 452,16 cbm und der Radius der Basis verhält sich zur Höhe des Cylinders wie m : n = 3 : 2. Aus diesen Angaben soll 1) der Radius r und 2) die gesamte Oberfläche O des Cylinders bestimmt werden.

8) Die gesamte Oberfläche eines geraden Cylinders beträgt 273,919784 qm und seine Höhe verhält sich zu seinem Durchmesser wie 1 : 2. Wie groß ist der Durchmesser d dieses Cylinders?

9) Die gesamte Oberfläche eines geraden Cylinders beträgt O = 376,8 qm und seine Höhe h = 4 m. Wie groß ist der Kubikinhalt K desselben?

10) Wie groß ist 1) der Radius r und 2) die Höhe h eines geraden Cylinders, wenn der Mantel desselben M = 376,992 qm und sein Kubikinhalt K = 753,984 cbm betragen ($\pi = 3{,}1416$)?

11) Die Grundfläche eines geraden Cylinders beträgt G = 50,24 qm und sein Mantel M = 150,72 qm. Wie groß ist das Volumen K dieses Cylinders?

12) Ein Cylinder von d = 30 cm Durchmesser und h = 54 cm Höhe soll mit Beibehaltung der Höhe so abgedreht werden, daß sich sein Volumen um c = 70 ccm vermindert. Welchen Durchmesser x wird er dann haben?

13) In einem Gebäude stehen 12 cylindrische Säulen aus Sandstein, von denen je vier gleichen Radius und gleiche Höhe haben. Die Summe der Radien sämtlicher 12 Säulen beträgt 2,96 m, und zwar ist der Radius der 4 mittelgroßen Säulen um 6 cm größer als der Radius der 4 kleinsten, aber um 8 cm kleiner als der der 4 größten. Die Höhen dieser drei Säulengruppen verhalten sich wie 6 : 7 : 8 zu einander und betragen zusammen 50,4 m. 1) Wie groß ist der Radius, die Höhe und das Volumen einer jeden Säule? 2) Welches Volumen haben alle zusammen? 3) Wieviel wiegen sie zusammen, wenn das spez. Gewicht des Sandsteins 2,2 ist?

14) Jemand kauft einen tannenen Block, der 6 m lang und 0,48 m dick ist, und bezahlt für den Kubikmeter 16 ℳ. Aus diesem Block läßt er 0,027 m dicke Bretter schneiden. Der Sägeschnitt beträgt 0,003 m und jede Schwarte ist 0,0435 m dick. Wie teuer kann er durchschnittlich ein Brett verkaufen, wenn vom laufenden Meter 0,02 ℳ Sägelohn berechnet werden, jede Schwarte 0,30 ℳ wert ist und er an der Summe, die nach Abrechnung des Wertes der Schwarten als Auslage bleibt, 25 % gewinnen will?

15) Aus einem runden Holzstamme von der Länge h = 5,2 m und dem Durchmesser d = 0,8 m soll eine Mühlwelle gehauen werden, und zwar so, daß die regelmäßigen Sechsecke, welche in die

beiden einander gleichen Cylindergrundflächen beschrieben werden können, die Grundflächen des Wellbaumes bilden. 1) Wieviel beträgt der Holzabfall? 2) Wieviel wiegt der Wellbaum, wenn das spez. Gewicht des Holzes s = 0,85 ist?

16) Auf eine quadratische Steinplatte soll eine cylindrische Marmorsäule, welche p = 879,2 kg schwer und h = 25 dm hoch ist, so gestellt werden, daß die Peripherie der Grundfläche von den Halbierungspunkten der Kanten der Steinplatte um a = 1 dm absteht. Wie groß muß die Kante der Steinplatte sein, wenn das spez. Gewicht des Marmors s = 2,8 ist?

17) Aus einem cylindrischen Baumstamme, der h = 7,5 m lang und d = 0,9 m dick ist, soll ein eben so langer, möglichst starker Balken mit quadratischer Basis geschnitten werden. Wie groß ist 1) der körperliche Inhalt des Balkens und 2) wieviel beträgt der Holzabfall?

18) Aus einem geraden Parallelepipedum, welches h = 6,1 m hoch ist und zur Basis ein Quadrat von der Seite a = 0,8 m hat, soll der größtmögliche Cylinder gedreht werden. Wieviel beträgt der Abfall der Masse dabei?

b) Der hohle Cylinder.

Mündlich.

1) Wieviel Liter Wasser faßt ein Hohlcylinder, dessen innerer Durchmesser 0,8 m und dessen Höhe 8 m beträgt und wieviel wiegt das Ganze, wenn das Gewicht des Gefäßes 108 kg beträgt?

2) Ein cylindrisches Gefäß, dessen innerer Durchmesser 0,4 m beträgt, ist bis zu einer Höhe von 0,5 m mit Quecksilber (spez. Gewicht = 13,5) gefüllt. Welchen Druck erleidet der Boden dieses Gefäßes?

3) Ein cylindrisches Gefäß von 1,5 m Höhe enthält 202 hl 50 l Wasser. Welche Grundfläche hat dasselbe?

4) In ein cylindrisches Bassin von 4 m Durchmesser wird eine Quelle geleitet, welche stündlich 62,8 hl liefert. Wie hoch steht nach 10 Stunden das Wasser?

5) Ein cylindrisches Bassin von 6 m Durchmesser und 5 m Tiefe soll durch ein Rohr gefüllt werden, das in jeder Sekunde 0,5 Liter liefert. In welcher Zeit wird dies geschehen?

6) Die Façade eines 12 m langen und (bis zum Dache) 10 m

hohen Gebäudes soll zur Abführung des Regenwassers mit einer halbcylindrischen Dachrinne von 10 cm Durchmesser und einem Wasserabfallrohr von gleicher Weite versehen werden. Wieviel qm Blech sind hiezu erforderlich, wenn man für Falze und Verschnitt 0,976 qm Blech mehr berechnet?

7) Ein cylindrisches Gefäß, dessen innerer Durchmesser 0,4 m beträgt, ist zum Teil mit Wasser gefüllt. Um wieviel erhöht sich die Oberfläche des Wassers, wenn man in dasselbe ein 266,9 kg schweres Messingstück (spez. Gewicht = 8,5) versenkt?

8) Um das Volumen eines unregelmäßig geformten Steines zu bestimmen, warf man denselben in ein graduiertes, zum Teil mit Wasser gefülltes cylindrisches Gefäß von 0,6 m Durchmesser und fand, daß das Wasser hiedurch um 5 cm stieg. Welches Volumen hat der Stein?

Schriftlich.

1) Eine cylindrische Röhre, deren Durchmesser d = 2 dm beträgt, soll so mit Quecksilber angefüllt werden, daß dieses gerade p = 50 kg wiegt. Welche Höhe h wird die Quecksilbersäule haben, wenn das spez. Gewicht des Quecksilbers s = 13,6 ist?

2) Um die Tiefe eines ganz mit Wasser gefüllten cylindrischen Bassins von 4,56 m Durchmesser zu finden, stellte man im Mittelpunkte desselben lotrecht einen Stab auf, der um 1,52 m über die Oberfläche des Wassers hervorragte. Ohne das untere, den Grund des Bassins berührende Ende des Stabes zu verrücken, neigte man denselben nach der Seite, und fand, daß das obere Ende genau bis an die Wasserfläche am Rand des Bassins reichte. Wie tief ist dasselbe und wieviel hl Wasser faßt es?

3) Der äußere Radius eines geraden Hohlcylinders ist R = 4 m, der innere r = 3 m und die Höhe des Cylinders beträgt h = 8 m. Wie groß ist 1) die körperliche Masse K und 2) die gesamte äußere und innere Oberfläche O des Hohlcylinders?

4) Wie schwer ist ein runder Schornstein aus Backsteinen, wenn sein Radius im Lichten 7,2 dm, sein äußerer 9,8 dm, seine Höhe 15 m beträgt und das spez. Gewicht der Backsteine 1,8 ist?

5) Der Durchmesser eines Mühlsteines beträgt D = 1,6 m, seine Dicke oder Höhe h = 0,9 m und sein körperlicher Inhalt

nach Abzug des Hohlcylinders in der Mitte K = 1,78038 cbm. Wie groß ist der Durchmesser des hohlen Raumes?

6) Der körperliche Inhalt eines Mühlsteines ohne Abzug des Hohlcylinders in der Mitte beträgt K = 1,23088 cbm und der Durchmesser desselben verhält sich zu seiner Höhe wie m : n = 7 : 4. Wie viele Umläufe muß dieser Stein in einer Minute machen, wenn ein Punkt seiner äußeren Peripherie eine Geschwindigkeit von v = 2,198 m in einer Sekunde erlangen soll?

7) Die körperliche Masse einer cylindrischen Röhre beträgt 2411,52 ccm, die Länge derselben h = 200 cm und der größere Radius R = 5 cm. Wie dick ist die Wand dieser Röhre?

8) In einer Röhre, die a = 9 dm weit ist, befindet sich ein Kolben mit einer b = 1,5 dm starken Kolbenstange. Über dem Kolben ist eine c = 15 dm hohe Wassersäule. Wie schwer ist diese?

9) Eine Röhre aus Gußeisen vom spez. Gewicht s = 7,5, in welcher der große Durchmesser D = 0,56 dm und die Dicke der Wand d = 0,02 dm beträgt, ist p = 30,5208 kg schwer. Wie lang ist diese Röhre?

10) Eine cylindrische Röhre aus Eichenholz vom spez. Gewicht s = 1,2, in welcher die äußere Weite D = 2,1 m und die Wanddicke d = 0,1 m beträgt, ist h = 4,2 m lang. Wie schwer ist dieselbe?

11) Durch einen Würfel aus Messing vom spez. Gewicht s = 8,4 geht eine cylindrische Öffnung hindurch, deren Achse die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier gegenüberstehender Seitenflächen des Würfels ist. Wie schwer ist dieser ausgehöhlte Würfel, wenn die Kante desselben a = 0,9 m und der Durchmesser der Öffnung d = 0,2 m beträgt?

12) Ein eiserner Cylinder, dessen Radius r = 0,2 m und dessen Höhe H = 1,2 m ist, soll mit einem cylinderförmigen Korkringe umgeben werden, der eine Höhe von h = 0,4 m hat. Wie groß muß der große Radius dieses Ringes sein, wenn das spez. Gewicht des Eisens S = 7,79, das des Korkes s = 0,24 ist und beide verbundene Körper mit dem Wasser im Gleichgewicht sein sollen? (Anhang IV.)

13) Ein Cylinder aus Eschenholz vom spez. Gewicht s = 0,6 hat einen Radius von r = 0,3 m und eine Höhe von h = 1,8 m.

Um denselben soll eine cylindrische Röhre von Zink, dessen spez. Gewicht S = 7,1 ist, gegossen werden. Wie dick muß die Wand dieser Röhre werden, wenn der aus beiden Stoffen bestehende Körper das Gewicht des Wassers haben soll?

14) Ein a = 4,2 m hoher Würfel aus Tannenholz vom spez. Gewicht s = 0,5 hat eine cylindrische Höhlung, die d = 0,2 m weit und mit Zink vom spez. Gewicht S = 7 ausgegossen ist. Wie tief ist diese Höhlung, wenn der Teil n = 0,507 dieses Körpers in das Wasser taucht?

15) Ein gerader Cylinder aus Gußeisen vom spez. Gewicht 7,5 hat eine 28,26 qdm große Grundfläche und wiegt 1059,75 kg. Denselben höhlt man von oben bis zur Mitte seiner Höhe so aus, daß die Wand der übrig bleibenden Masse überall die Dicke von 1 dm hat, und füllt nun die Höhlung mit Öl, vom spez. Gewicht 0,9 an. Wieviel wiegt jetzt das Ganze?

16) Eine Röhre aus Kupfer vom spez. Gewicht s = 9 ist h = 2,4 m lang und wiegt p = 141,818 kg. Wie dick ist die Wandung derselben, wenn ihr äußerer Durchmesser d = 0,7 m beträgt?

17) Ein vierkantiger Balken, welcher h = 6,4 m lang, b = 0,4 m breit und c = 0,3 m dick ist, wird cylindrisch ausgehöhlt. Wie groß ist jetzt die körperliche Masse K desselben, wenn der Durchmesser des leeren Cylinderraumes d = 0,14 m beträgt?

c) **Der Cylinderausschnitt und Cylinderabschnitt.**

1) Durch die Achse h = 4 m eines geraden Cylinders vom Radius r = 3 m sind zwei Ebenen gelegt, die miteinander den Winkel n = 21° bilden und ein keilförmiges Stück aus dem Cylinder herausschneiden. Wie groß ist 1) der körperliche Inhalt K und 2) die gesamte Oberfläche O dieses Cylinderausschnittes?

2) Der Radius eines geraden Cylinders ist r = 2,2 m und die Höhe desselben h = 4,6 m. Wie groß ist der Inhalt und die gesamte Oberfläche 1) der Hälfte und 2) des vierten Teils dieses Cylinders?

3) Ein gerader Cylinder, dessen Durchmesser d = 2,4 m beträgt, ist oben schräg so abgeschnitten, daß der senkrechte Abstand des höchsten Punktes des schiefen Schnittes von der unteren Grundfläche H = 12,2 m und der Abstand des niedrigsten Punktes desselben h = 10,4 m beträgt. Wie groß ist der körperliche Inhalt K dieses Cylinders?

d) Die Gewölbe.

1) Ein steinernes Gewölbe in der Form eines Halbcylinders hat eine Länge von h = 10,2 m und einen äußeren Durchmesser von D = 7,4 m. Wieviel beträgt die Steinmasse K, wenn die Dicke der Wand d = 0,9 m ist?

2) Ein 10,4 m langes steinernes Gewölbe in der Form eines Halbcylinders ist im Lichten 5,2 m weit; die Dicke der Wand beträgt 0,8 m. Welchen Inhalt hat dieses Gewölbe im Lichten? Wieviel hl Kartoffel faßt es? Wie hoch kommt es zu stehen, wenn das cbm 31 ℳ kostet?

§ 15. Der Kegel.

a) Der ganze Kegel.

Mündlich.

1) Der Radius der Grundfläche eines Kegels mißt 4 m und die Höhe desselben 7,5 m. Wie groß ist der Kubikinhalt desselben?

2) Der Radius der Grundfläche eines kegelförmigen Zuckerhutes mißt 2 dm und die Höhe desselben 6 dm. Welchen Wert hat dieser Zuckerhut, wenn das spez. Gewicht des Zuckers 1,5 ist und 1 ℔ Zucker 0,50 ℳ kostet?

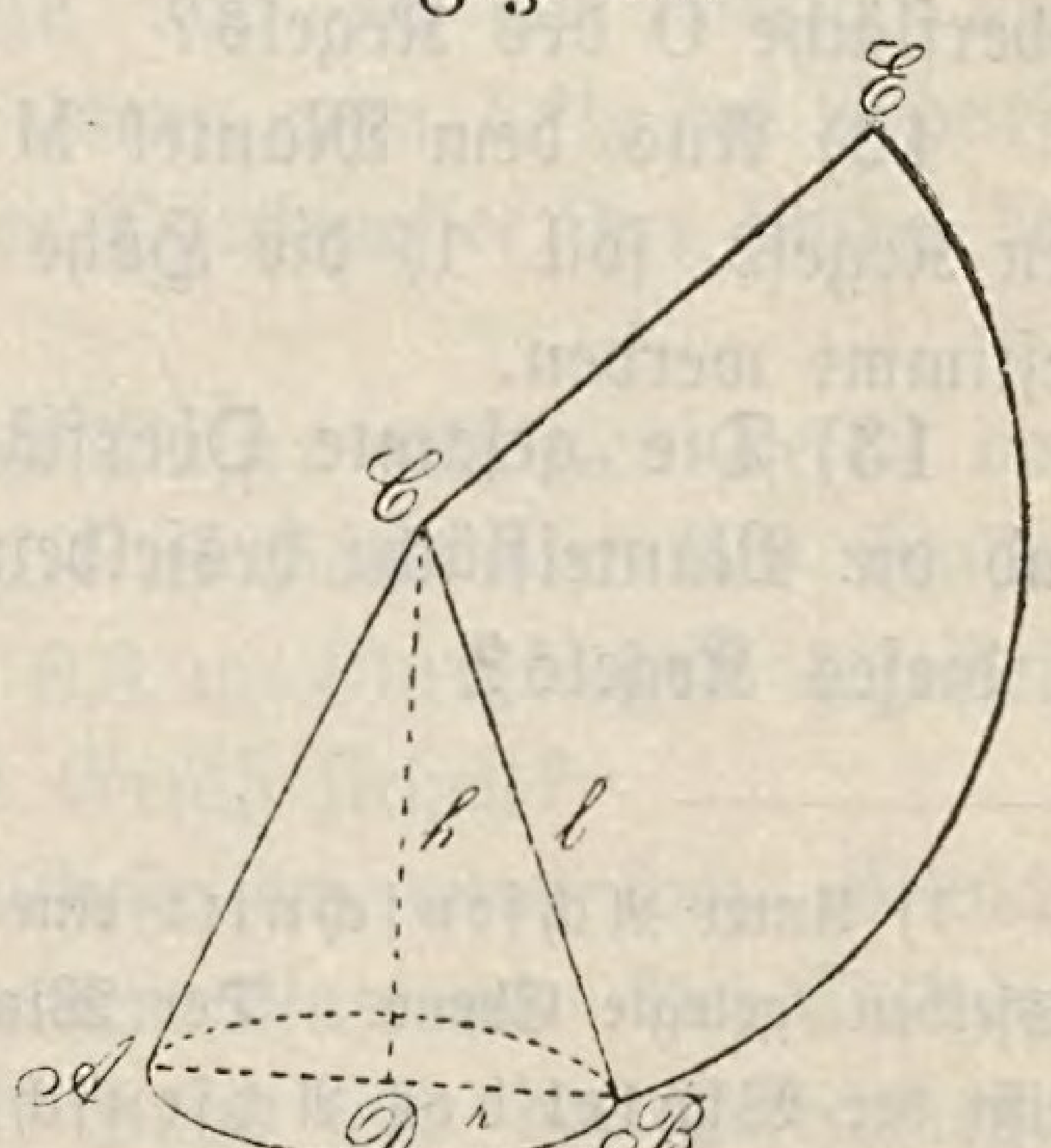
3) Die Seitenlinie eines Kegels mißt 61 cm und der Radius der Basis 11 cm; wie hoch ist dieser Kegel?

4) Der Radius eines Kegels mißt 35 cm und seine Höhe 12 cm; wie lang ist seine Seitenlinie?

Schriftlich.

1) Aus der Höhe h = 2,4 m und dem Radius r = 3,2 m der Grundfläche eines geraden Kegels soll berechnet werden 1) der Inhalt K, 2) der Mantel M und 3) die gesamte Oberfläche O desselben. Fig. 10.

Fig. 10.



2) Aus dem Radius r = 0,9 m der Grundfläche und der Seitenlinie l = 1,5 m eines geraden Kegels soll berechnet werden 1) der Inhalt K, 2) der Mantel M und 3) die gesamte Oberfläche O desselben.

3) Die gesamte Oberfläche eines geraden Kegels beträgt O = 628 qm und der Radius der Basis r = 8 m. Wie hoch ist dieser Kegel?

4) Aus der Oberfläche O = 282,6 qm und der Höhe h = 12 m eines geraden Kegels soll der Halbmesser r der Basis desselben bestimmt werden.

5) Die Höhe eines geraden Kegels ist h = 2,4 m und die Seitenlinie desselben l = 2,5 m. Wie groß ist seine Oberfläche O?

6) Es soll die Oberfläche eines Kegels in dessen Grundfläche g und Höhe h ausgedrückt werden.

7) Die Mantelfläche eines Kegels, der 4,5 m hoch ist, beträgt 38,4336 qm. Wie groß ist die Seitenlinie l und der Radius r der Basis desselben?

8) Der Achsenschnitt[1]) eines geraden Kegels bildet ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite a = 4,2 m lang ist. Man soll hieraus 1) die ganze Oberfläche O und 2) den körperlichen Inhalt K des Kegels berechnen.

9) Der Kubikinhalt eines geraden Kegels beträgt K = 44,31168 cbm und die Höhe desselben mißt h = 2,4 m. Wie groß ist der Durchmesser d der Basis?

10) Der Umfang der Grundfläche eines geraden Kegels beträgt p = 12,56 m und die Seite mißt l = 2,5 m. Wie groß ist 1) der Körperinhalt K und 2) die gesamte Oberfläche O dieses Kegels?

11) Das Volumen eines geraden Kegels beträgt K=125,6 cbm und der Radius der Basis r = 4 m. Wie groß ist die gesamte Oberfläche O des Kegels?

12) Aus dem Mantel M und der Grundfläche G eines geraden Kegels soll 1) die Höhe h und 2) der Inhalt K desselben bestimmt werden.

13) Die gesamte Oberfläche eines geraden Kegels beträgt O und die Mantelfläche desselben M qm. Wie groß ist das Volumen K dieses Kegels?

---

1) Unter Achsenschnitt eines Kegels versteht man die durch die Achse desselben gelegte Ebene. Der Winkel an der Spitze des Durchschnittsdreieckes heißt der Winkel des Achsenschnitts. Ein Kegel, bei welchem die Seitenlinie gleich dem Durchmesser ist, wird ein gleichseitiger genannt.

14) Der Radius der Grundfläche eines geraden Kegels ist r = 0,4 m und die Höhe desselben h = 0,96 m. Wie groß ist der Zentriwinkel des Kreisausschnittes, der zusammengerollt den Mantel des Kegels bildet?

15) Der in eine Ebene aufgerollte Mantel eines geraden Kegels bildet einen Sektor, dessen Radius r = 1,2 m und dessen Zentriwinkel n = 90° mißt. Welches Volumen V hat dieser Kegel?

16) Der körperliche Inhalt eines geraden Kegels beträgt K = 2,41152 cbm, und seine Höhe verhält sich zur Seitenlinie wie m : n = 4 : 5. Wie groß ist der Radius r der Grundfläche dieses Kegels?

17) Die Basis eines kegelförmigen Zuckerhutes, der 0,51 m hoch ist, hat 75,36 cm Umfang. Welchen Wert hat dieser Zuckerhut, wenn das spez. Gewicht des Zuckers 1,6 ist und 1 kg Zucker 1,05 *M* kostet?

18) Ein kegelförmiges Gefäß faßt 113,04 l Wasser. Die Tiefe desselben ist doppelt so groß als der Durchmesser. Wie groß ist der letztere?

19) Um die Höhe einer Tanne zu bestimmen, stellte man neben dieselbe senkrecht einen 2 m hohen Stab; die Länge des von dem Stabe geworfenen Schattens betrug 0,5 m, und in demselben Augenblick war der Schatten der Tanne 4,8 m lang. a) Wie hoch ist diese Tanne? b) Welchen körperlichen Inhalt hat dieselbe, wenn ihr Umfang am Stammende 1,57 m beträgt? c) Wieviel ist sie wert, wenn das Kubikmeter Tannenholz 24,6 *M* kostet?

20) Ein senkrechter Kegel, dessen Höhe $1^5/_7$ mal so groß ist, als der Durchmesser seiner Basis soll auf seiner Mantelfläche beschlagen werden. Wie viele Blechtafeln von 2,1 cm Breite und 6,4 cm Länge sind hiezu erforderlich, wenn man 5 % des Bedarfs mehr in Anrechnung bringt und der Durchmesser der Basis des Kegels 1,4 m beträgt?

21) Aus einem kegelförmigen, mit Wasser gefüllten Gefäß von D = 0,4 m Durchmesser und h = 0,54 m Höhe wird das Wasser in ein cylindrisches Gefäß von d = 0,3 m Durchmesser gegossen. Wie hoch wird das Wasser in diesem Gefäß stehen?

22) Auf einem Cylinder aus Gußeisen vom spez. Gewicht 7,5 ruht ein gerader Kegel aus demselben Material. Der Cylinder ist doppelt so hoch als breit, und die Höhe und der Durchmesser des Kegels sind dem Durchmesser des Cylinders gleich. Wie groß

ist der Radius und die Höhe des Cylinders, wenn das Gewicht des ganzen Körpers 2967,3 kg beträgt?

23) Ein gerader Kegel aus Lindenholz vom spez. Gewicht s = 0,4 ist h = 6 dm hoch; der Radius seiner Basis beträgt r = 4 dm. Aus diesem Kegel wird konzentrisch zur Achse ein Cylinder herausgeschnitten, und der hohle Raum mit Blei vom spez. Gewicht S = 11,4 ausgefüllt. Wie groß ist das Volumen V dieses Cylinders, wenn das Gewicht des ganzen Körpers p = 260,192 kg beträgt?

b) Der abgestumpfte Kegel.

Mündlich.

1) Die Höhe eines Kegelstumpfes ist 24 cm, und die beiden Endflächenradien messen 8 cm und 3 cm; welches ist die Höhe des ganzen Kegels und des Ergänzungskegels?

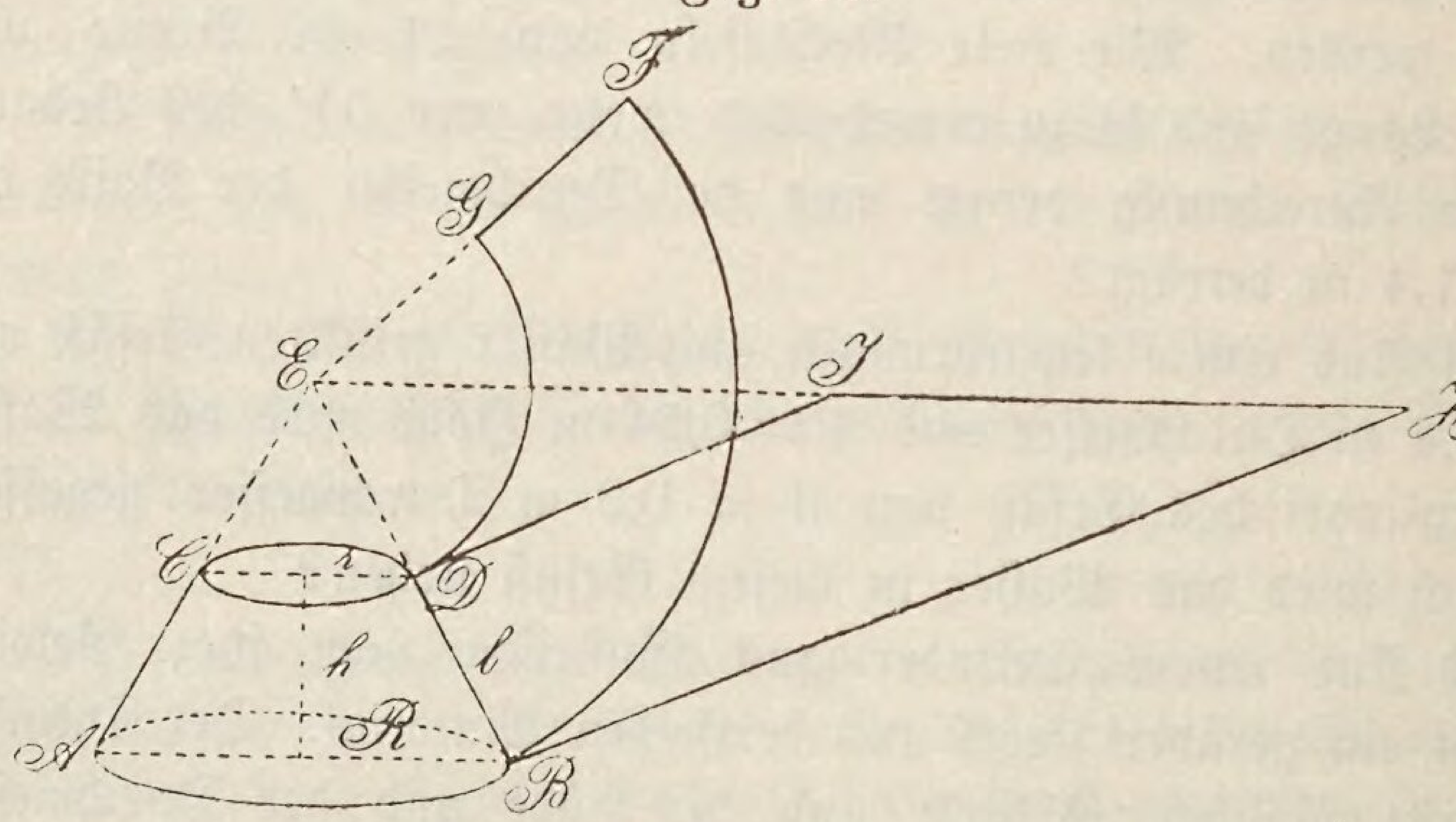
2) Die beiden Radien eines Kegelstumpfes sind 4 cm und 3 cm lang, und seine Höhe mißt 21 cm; wie groß ist sein Volumen?

Schriftlich.

1) Von einem geraden Kegelstumpfe sind die Radien der Grundflächen R und r, sowie die Höhe h desselben gegeben. Hieraus soll eine Formel zur Berechnung des Volumens V des Kegelstumpfes entwickelt werden. (Anhang III.)

2) Aus den Radien R und r der Grundflächen sowie der Höhe h eines abgestumpften Kegels soll berechnet werden 1) der Mantel M und 2) die gesamte Oberfläche O desselben. Fig. 11.

Fig. 11.



3) Die Radien der Grund- und Deckfläche eines geraden Kegelstumpfes sind R = 0,6 m und r = 0,5 m lang, und die Höhe des Kegels mißt h = 0,8 m. Wie groß ist 1) der Mantel M, 2) die Oberfläche O und 3) der Kubikinhalt K dieses Stumpfes?

4) Die Radien der Grund- und Deckfläche eines abgestumpften Kegels betragen R = 4 m und r = 1,5 m und die Höhe desselben mißt h = 24 m. Wie groß ist 1) der Kegelstumpf S, 2) der Ergänzungskegel E, 3) der ganze Kegel K und 4) die Höhe des letzteren H?

5) Wie groß ist der Kubikinhalt K eines Kegelstumpfes, wenn dessen Höhe h = 5,7 m mißt und die Umfänge seiner Grund- und Deckfläche P = 8,792 m und p = 5,024 m betragen?

6) Aus den Halbmessern der Grund- und Deckfläche eines abgekürzten Kegels R = 2,9 m, r = 1,3 m und der Seitenlinie l = 6,5 m desselben soll berechnet werden 1) der Mantel M, 2) die Oberfläche O und 3) der Kubikinhalt K dieses Kegelstumpfes.

7) Der Kubikinhalt eines Kegelstumpfes beträgt 769,3 cbm, die Höhe mißt 15 m und der Radius der Basis 5 m. Wie groß ist der Radius der Deckfläche?

8) Man will ein Gefäß in Form eines abgestumpften Kegels herstellen, das an der Bodenfläche 0,3 m, an der oberen offenen Fläche 0,35 m Radius bekommen und 139,573 Liter fassen soll. Wie tief muß dasselbe werden?

9) Ein Baumstamm ist 6,42 m lang; sein Durchmesser beträgt an dem einen Ende 0,78 m und an dem anderen 0,66 m. Welchen Inhalt hat derselbe (auf 3 fache Art zu berechnen und die Ergebnisse zu vergleichen)?

10) Ein Eichenstamm von 8,4 m Länge hat an dem einen Ende 4,082 m und am anderen 2,826 m Umfang. Wieviel wiegt derselbe, wenn das spez. Gewicht des Eichenholzes 0,8 ist?

11) Ein Gefäß in Form eines abgestumpften Kegels, dessen Deckflächen die Radien 15 cm und 12 cm haben und dessen Höhe 24 cm beträgt, wird vollständig mit Wasser gefüllt. Wie groß ist der Bodendruck, je nachdem das Gefäß auf die größere oder kleinere Deckfläche aufgesetzt wird, und wie groß ist das Gewicht des Wassers?

12) Eine an beiden Enden offene Röhre aus Messing vom spez. Gewicht s = 8,2 hat die Form eines abgestumpften

Kegels und eine gleichmäßig dicke Wand. Die Achse dieser Röhre ist h = 2,4 m lang, der äußere Durchmesser an dem dickeren Ende beträgt D = 0,9 m, der innere Durchmesser daselbst d = 0,8 m und der innere Durchmesser an dem schmäleren Ende c = 0,45 m. Wie schwer ist diese Röhre?

13) Aus einem Baumstamme, der h = 8,6 m lang ist und an seinen Enden die Radien R = 0,5 m und r = 0,3 m hat, soll ein ebenso langer viereckiger möglichst dicker Balken gehauen werden, doch so, daß der Balken überall gleiche Dicke bekommt. Wieviel beträgt der Holzabfall A?

14) Aus einem Baumstamme, der h = 12 m lang ist und dessen Endflächenradien R = 1,8 m und r = 1,2 m messen, soll ein ebenso langer viereckiger Balken geschnitten werden, und zwar sollen die Quadrate, welche sich in die Grundflächen des Stammes einschreiben lassen, die beiden Grundflächen dieses Balkens werden. Wie groß ist 1) der Inhalt K desselben und 2) der Abfall A an Holz?

15) Es soll ein Brunnen von h = 25 dm Tiefe ausgegraben werden; eine Seite seines quadratischen Querschnitts soll die Länge a = 12 dm bekommen. Zur Herausschaffung des Erdreichs bedient man sich eines Eimers in der Gestalt eines abgestumpften Kegels. Der größere Durchmesser desselben mißt im Lichten D = 4,2 dm, der kleinere d = 1,8 dm und die Länge der Seitenlinie beträgt s = 3,7 dm. Wie oft muß dieser Eimer gefüllt werden, wenn m = 10 Raumeinheiten des festen Erdreichs n = 17 Einheiten im aufgelockerten Zustand geben?

c) Die Berechnung der Fässer.

1) Eine der gebräuchlichsten Methoden, das Volumen kreisrunder Fässer zu berechnen, besteht darin, daß man das Faß als einen Körper betrachtet, der aus zwei gleichen abgestumpften Kegeln besteht, die mit ihren Grundflächen aneinander gefügt sind. Wie groß ist demnach der Inhalt V eines solchen Fasses, wenn dessen Länge h = 1 m, seine Spundtiefe D = 0,76 m und seine Bodenweite d = 0,66 m beträgt?

2) Den Inhalt kreisrunder Fässer pflegt man in der Praxis häufig bloß annähernd in folgender Weise zu berechnen: Man sieht ein solches als einen gleich hohen Cylinder an, dessen Durchmesser

das arithmetische Mittel zwischen der Spundtiefe (dem Bauchdurchmesser) und der Bodenweite (dem Bodendurchmesser) des Fasses ist. Wie groß ist hiernach der Inhalt eines solchen, wenn, wie in der vorigen Aufgabe, h = 1 m, D = 0,76 m und d = 0,66 m beträgt?

§ 16. Die Kugel.

Mündlich.

1) Der Radius einer Kugel mißt 3 cm; wie groß ist der Durchmesser, die Peripherie, die Oberfläche und das Volumen derselben?

2) Eine Kugel von 0,4 m Radius soll vergoldet werden; wie hoch kommt die Vergoldung, wenn das qm 200 ℳ kostet?

3) Wie groß ist der Auftrieb einer Kugel von 3 m Halbmesser in der Luft (1 cbm Luft wiegt 1,3 kg)?

4) Der Radius einer Kugel mißt 4 m und die Höhe einer Kalotte 3 m; wie groß ist diese und der zugehörige Kugelsektor?

5) Die Halbmesser zweier Kugeln sind 3 cm und 5 cm; wie verhalten sich ihre Oberflächen und Kubikinhalte zu einander?

Schriftlich.

a) Die ganze und halbe Kugel.

1) Massive Kugel.

1) Aus dem Radius r = 0,12 m einer Kugel soll berechnet werden 1) die Oberfläche O und 2) der Inhalt K derselben.

2) Aus dem Durchmesser d = 0,36 m einer Kugel soll 1) ihre Oberfläche O und 2) ihr Inhalt K berechnet werden.

3) Aus der Peripherie p = 28,26 m eines größten Kugelkreises soll 1) die Oberfläche O und 2) der Inhalt K der Kugel gefunden werden.

4) Der körperliche Inhalt einer Kugel beträgt K = 113,04 cbm; wie groß ist 1) der Radius r, 2) der Durchmesser d, 3) der größte Umfang p und 4) die Oberfläche O der Kugel?

5) Die Oberfläche einer Kugel beträgt O = 452,16 qm; wie groß ist 1) der Halbmesser r, 2) der Durchmesser d, 3) der größte Umfang p und 4) das Volumen K der Kugel?

6) Die Summe der Durchmesser zweier Kugeln ist s = 15 m, und die Summe ihrer Oberflächen O = 367,38 qm. Wie groß ist der Durchmesser einer jeden Kugel?

7) Ein Meter ist bekanntlich der zehnmillionte Teil des Meridianbogens vom Äquator bis zum Nordpol (des Erdquadranten). Hiernach soll der Umfang, der Durchmesser, der Halbmesser, die Oberfläche und der Körperinhalt der Erde in km, resp. in qkm und ckm berechnet werden. Dieselben Größen sind auch für den Mond und die Sonne zu bestimmen (das Volumen des Mondes ist 0,02 mal und das der Sonne 1251000 mal so groß als das Volumen der Erde).

8) Von zwei Kugeln, deren eine den Radius r hat, hat die andere eine n = 9 mal so große Oberfläche; wie groß ist deren Radius? Wie groß würde er sein, wenn die zweite Kugel ein n = 8 mal so großes Volumen hätte als die erste?

9) Eine eiserne Kugel wiegt p = 105,975 kg; welchen Durchmesser d hat dieselbe, wenn das spez. Gewicht des Eisens s = 7,5 ist?

10) Wie viele Kugeln von d = 0,09 dm Durchmesser lassen sich aus p = 6 kg Blei gießen, wenn das spez. Gewicht des Bleies s = 11,4 ist?

11) Der Durchmesser der Mündung eines Gewehrlaufs beträgt d = 0,16 dm. Für dieses Gewehr sollen aus p = 72 kg Blei Kugeln gegossen werden. Wie viele Kugeln erhält man aus diesem Quantum Blei, wenn beim Schmelzen desselben $m = 11^1/_9\,^0/_0$ verloren gehen und das spez. Gewicht des Bleies s = 11,39 ist?

12) Der Radius einer Kugel aus Blei vom spez. Gewicht S = 11,4 ist R = 2,4 m; derjenige einer Kugel aus Kupfer vom spez. Gewicht s = 7,8 mißt r = 2,1 m. Wie groß ist der Radius x einer Kugel aus Eisen vom spez. Gewicht m = 7,5, welche so schwer ist, als jene beiden Kugeln zusammen?

13) Eine Platinkugel von r = 2 cm Radius ist ganz in Quecksilber vom spez. Gewicht s = 13,6 eingetaucht. Wie groß ist der Gewichtsverlust G derselben?

14) Wie groß ist die Steigkraft S einer Korkkugel von d = 4 cm Radius in Wasser, wenn das spez. Gewicht des Korkes s = 0,24 ist?

15) Welches Gewicht hat eine Kugel von 0,42 m Durchmesser, welche im Wasser bis zur Hälfte einsinkt? Welches Gewicht hat eine andere Kugel von demselben Durchmesser, die im Wasser um $^1/_5$ ihrer Größe einsinkt?

16) Ein Körper aus Tannenholz vom spez. Gewicht s = 0,5 hat ein Volumen von v = 12,4 cdm. Derselbe soll mit einer Kugel aus Blei vom spez. Gewicht S = 11,4 verbunden werden. Wie groß muß der Radius r der letzteren sein, wenn die beiden verbundenen Körper im Wasser schweben sollen?

17) Eine Kuppel in der Form einer Halbkugel von d = 14 m Durchmesser soll mit Kupferplatten gedeckt werden. Wieviel Platten sind dazu erforderlich, wenn jede derselben a = 0,5 qm deckt und p = 8% mehr gerechnet werden? Wie hoch kommt das Material zu stehen, wenn 1 qm b = 12 Pfund wiegt und das Pfund mit c = 1,5 ℳ bezahlt wird?

2) Hohlkugel.

1) Der größere Halbmesser einer Hohlkugel beträgt R = 0,6 dm und die Dicke der Schale d = 0,35 dm. Wie groß ist der Hohlraum H der Kugel? Welches Gewicht G hat die Kugelschale, wenn das spez. Gewicht des Stoffs, woraus sie besteht, s = 7,25 ist?

2) Wieviel beträgt der Rauminhalt der atmosphärischen Luft in Kubikmeilen, wenn ihre Ausdehnung über der Erdoberfläche zu 10 Meilen und der Radius der Erde zu 860 Meilen angenommen wird?

3) Der größere Halbmesser einer Hohlkugel mißt R = 6 m und der körperliche Inhalt ihrer überall gleich dicken Schale beträgt v = 13,5 cbm. Welches ist die Dicke d der Schale?

4) Die äußere Fläche einer Hohlkugel beträgt O = 9 qm und die innere o = 6,25 qm. Welche Dicke d hat ihre Schale?

5) Der größere Durchmesser einer Hohlkugel ist D = 2,4 m und die Dicke der Schale beträgt d = 0,015 m. Wie schwer ist dieselbe, wenn sie aus Kupfer vom spez. Gewicht s = 7,8 besteht?

6) Der innere Durchmesser einer Hohlkugel beträgt D = 0,15 m und die Dicke der Schale d = 0,0075 m. Wie groß ist die ganze innere und äußere Fläche O dieser Hohlkugel?

7) Eine Hohlkugel aus Eisen vom spez. Gewicht s = 7 wiegt p = 18,694 kg. Wie groß ist der äußere Durchmesser x dieser Hohlkugel, wenn der Durchmesser ihres inneren Raumes D = 1,8 dm mißt?

8) Das Volumen der Schale einer Hohlkugel beträgt V = 30,63384 cbm und die Dicke derselben d = 0,3 m. Wie groß ist der Radius x der ganzen Kugel und der Radius y der Hohlkugel?

9) Jemand will aus Eisen vom spez. Gewicht s = 7,5 eine

Hohlkugel herstellen; die Dicke der aus diesem Stoff bestehenden Rinde soll d = 0,6 dm und das Gewicht dieser Rinde p = 37,5 kg betragen. Wie groß müssen die äußeren und inneren Radien x und y werden?

10) Es soll aus einem d = 1 cm dicken Messingblech vom spez. Gewicht s = 8 eine Hohlkugel verfertigt werden, welche im Wasser schwebt. Wie groß muß der äußere Radius x und der innere Radius y dieser Hohlkugel werden?

11) Eine Hohlkugel aus Eisen vom spez. Gewicht s = 7,2, deren äußerer Radius r = 30 cm beträgt, sinkt gerade zur Hälfte im Wasser ein. Wie groß ist die Wandstärke derselben?

12) Aus p = 4 kg Eisen, dessen spez. Gewicht s = 7,2 ist, soll eine Hohlkugel verfertigt werden, welche gerade zur Hälfte im Wasser untersinkt. Wie groß müssen die Radien x und y der äußeren und inneren Fläche sein?

13) Die Schale einer Hohlkugel aus Holz vom spez. Gewicht S = 1,4 ist d = 0,4 dm dick; den hohlen Raum dieser Kugel hat man mit einer Flüssigkeit vom spez. Gewicht s = 0,4 ausgefüllt. Wie groß müssen die Radien x und y der äußeren und inneren Fläche dieser Hohlkugel werden, wenn dieselbe mit einer Flüssigkeit vom spez. Gewicht t = 0,9 im Gleichgewicht sein, d. h. darin schweben soll?

14) Ein Gewölbe in der Form einer Halbkugel hat im Lichten D = 4,5 m Durchmesser, und die Steindicke beträgt d = 0,8 m. Welches ist der körperliche Inhalt der Steinmasse S?

15) Eine Hohlkugel von 0,032 m Wandstärke soll 80 Liter Wasser fassen. Welche Durchmesser sind ihr zu geben?

16) Welche Last kann ein auf dem Wasser schwimmendes halbkugelförmiges Gefäß aus Eisen vom spez. Gewicht s = 7,5 tragen, wenn der äußere Durchmesser desselben D = 6 m und seine Wandstärke d = 0,008 m beträgt?

5) Luftballon.

1) Wie groß ist der Auftrieb A einer Kugel von r = 10 m Halbmesser in der atmosphärischen Luft, wenn das Gewicht eines Kubikmeters der letzteren c = 1,3 kg beträgt?

2) Wie groß ist die Steigkraft K eines kugelförmigen Luftballons von r = 10 m Halbmesser, wenn das Gewicht von 1 cbm atmosphärischer Luft S = 1,3 kg, das Gewicht von 1 cbm des den

Ballon füllenden Gases s = 0,78 kg und das Gewicht eines Quadratmeters der Hülle t = 0,3 kg beträgt?

3) Ein Ballon von 8 m Durchmesser soll mit Wasserstoff (1 cbm = 0,09 kg) gefüllt werden. Mit wieviel Sandsäcken a = 20 kg muß man denselben beschweren, damit er nicht steigt?

4) Ein kugelförmiger Ballon von 36 m Durchmesser ist mit Wasserstoff gefüllt; von der Hülle wiegt 1 qm 0,6 kg; die Gondel und Stricke wiegen zusammen 40 kg. Wie groß ist die Steigkraft desselben?

5) Wie groß muß der Radius eines kugelförmigen Luftballons sein, damit der Ballon in der Luft schwebend erhalten wird, wenn das Gewicht von 1 cbm atmosphärischer Luft m = 1,3 kg, das Gewicht eines Kubikmeters des denselben füllenden Gases n = 0,09 kg und das Gewicht eines Quadratmeters der Hülle p = 0,35 kg beträgt?

6) Ein kugelförmiger Luftballon soll mit Wasserstoff vom spez. Gewicht 0,07 gefüllt werden; die Hülle desselben wiegt 360 kg. Welchen Durchmesser müßte derselbe erhalten, wenn er in der Luft gerade nur schweben bleiben sollte?

4) Die Kugel in Verbindung mit den regelmäßigen Polyedern.

1) Aus der Kante a = 5,6 m eines Würfels soll berechnet werden 1) der Radius R der durch alle Ecken gehenden Kugelfläche, d. h. der umgeschriebenen Kugel und 2) der Radius r der alle Seitenflächen berührenden Kugelfläche, der eingeschriebenen Kugel.

2) Der Inhalt eines Würfels beträgt 4,096 cbm; wie groß ist die Oberfläche der um denselben beschriebenen Kugel?

3) Aus einem Würfel, dessen Kante a = 0,48 m beträgt, soll eine Kugel gedrechselt werden; wieviel geht an Material verloren?

4) Aus einer Kugel von d = 12 m Durchmesser soll ein möglichst großer Würfel hergestellt werden; wie groß wird die Seite desselben?

5) Aus der Kante a = 4,6 m eines regelmäßigen Tetraeders soll berechnet werden 1) der Radius R der umgeschriebenen Kugel, 2) der Radius r der eingeschriebenen Kugel, 3) der Körperinhalt K und 4) die Oberfläche O des Tetraeders.

6) Die Seite eines regelmäßigen Tetraeders ist a = 2,4 m; wie groß ist 1) die Oberfläche O der umgeschriebenen, und 2) die Oberfläche o der eingeschriebenen Kugel?

7) Aus der Kante a = 6 m eines Oktaeders soll berechnet

werden 1) der Radius R der umgeschriebenen, 2) der Radius r der eingeschriebenen Kugel, 3) der Körperinhalt K und 4) die Oberfläche o des Oktaeders?

8) Aus der Kante a = 6 m eines Oktaeders soll berechnet werden 1) die Oberfläche O der umgeschriebenen und 2) die Oberfläche o der eingeschriebenen Kugel.

b) Verschiedene Teile der Kugel.

1) Kugelsektor und Kalotte.

1) Der Radius einer Kugel beträgt r = 3 m; eine Kalotte auf derselben hat eine Höhe h = 2 m. Wie groß ist 1) der Flächeninhalt F der Kalotte und 2) der Inhalt K des zugehörigen Kugelsektors?

2) Es soll der Körperinhalt K eines Kugelsektors und der Flächeninhalt F der zugehörigen Haube aus dem Kugelradius r und der Sehne s, welche den Pol der Haube mit einem Punkte der Peripherie ihres Grundkreises verbindet, berechnet werden.

3) Es wird in einem Abstande = p m vom Mittelpunkte einer Kugel durch diese eine Ebene gelegt, deren Radius = r ist; wie groß ist der Inhalt F der darüber liegenden Haube?

4) Die Kalotte einer Kugel hat den Inhalt F = 56,52 qm und die Höhe h = 2 m; wie groß ist der Halbmesser r der Kugel?

5) Die Höhe der Kalotte einer Kugel beträgt h m und der Flächeninhalt derselben F qm. Wie groß ist der körperliche Inhalt K der Kugel?

6) Die Höhe einer Kalotte ist h m, und der Radius des Grundkreises derselben beträgt a m; wie groß ist der Flächeninhalt F derselben?

7) Aus dem Radius R einer Kugel und dem Radius r eines Nebenkreises derselben soll der Kubikinhalt K des der kleineren Haube entsprechenden Sektors berechnet werden.

2) Kugelsegment.

1) Von einer Kugel, deren Halbmesser r = 0,8 m ist, wird ein Abschnitt von h = 0,3 m Höhe genommen. Wie groß ist der Inhalt K desselben?

2) Aus dem Kubikinhalt K = 904,32 cbm und der Höhe h = 6 m eines Kugelsegments soll der Radius r der Kugel berechnet werden.

3) Die Höhe eines Kugelsegments beträgt h m und der Radius des Grundkreises a m. Wie groß ist 1) die zugehörige Haube F, 2) der zugehörige Kugelsektor K, 3) der Kegel k, welcher mit dem Segmente die Grundfläche gemein hat und dessen Spitze im Kugelzentrum liegt, und 4) das Kugelsegment S?

4) Eine hölzerne Kugel, deren Durchmesser $d = 10$ cm beträgt, sinkt im Wasser so weit ein, daß der hervorragende Teil die Höhe $h = 3$ cm hat. Wie groß ist das spez. Gewicht der Holzart, woraus diese Kugel besteht?

3) Kugelschicht und Zone.

1) Der Radius einer Kugel ist $r = 3$ m; die Abstände der beiden Grundflächen einer Kugelschicht (körperlichen Zone) von demselben Pol der Kugel betragen $H = 2{,}2$ m und $h = 1{,}3$ m. Man berechne hieraus 1) den Inhalt K und 2) die krumme Oberfläche O (die Zone) dieser Kugelschicht.

2) Es soll der Kubikinhalt K einer Kugelschicht berechnet werden aus dem Radius $r = 2{,}4$ m der Kugel, der Höhe $h = 1{,}5$ m der Kugelschicht und dem Abstande $p = 0{,}4$ m ihrer größeren Basis vom Mittelpunkte der Kugel.

3) Es soll der Körperinhalt K einer Kugelschicht aus ihrer Höhe h und den Radien a und b der beiden Grundkreise berechnet werden.

§ 17. Vergleichung einiger Körper.

1) Ein Würfel und eine Kugel haben gleiche Oberfläche. Wie verhalten sich ihre Kubikinhalte?

2) Ein Würfel und eine Kugel haben gleichen Kubikinhalt. Wie verhalten sich ihre Oberflächen O und O_1?

3) Wie verhalten sich bei gleicher Kante die Kubikinhalte des regelmäßigen Tetraeders, des Hexaeders und des Oktaeders?

4) Wie verhält sich der Mantel eines gleichseitigen Cylinders zum Mantel eines gleich hohen gleichseitigen Kegels?

5) Ein gleichseitiger Cylinder und ein gleichseitiger Kegel haben gleiche Oberfläche. Wie verhalten sich ihre Kubikinhalte?

6) Ein Kegel, eine Kugel und ein Cylinder haben einerlei Höhe und einerlei Durchmesser (2r). Wie verhalten sich die Inhalte dieser Körper?

§ 18. Vermischte Aufgaben zu allen Gebieten beider Teile.

Mündlich.

1) Wie viele Gerade können höchstens zwischen 420 Punkten gezogen werden?

2) Wie viele Diagonalen sind in einem 250-Eck möglich?

3) Ein Winkel ist 68° 27′ 45″ groß. Wie groß ist das Supplement desselben?

4) Die 3 Seiten eines ungleichseitigen Dreieckes sind 25 m, 29 m und 36 m lang; wie groß ist der Inhalt desselben?

5) Wie groß ist ein Winkel im regelmäßigen 24-Eck?

6) Wie groß ist ein Außenwinkel am regelmäßigen 15-Eck?

7) Die Länge eines rechteckigen Grundstückes verhält sich zur Breite wie 8 : 7. Wie lang und breit ist dasselbe, wenn $^3/_4$ seines Inhaltes 168a beträgt?

8) Der Umfang eines Trapezes beträgt 146 m; die beiden nicht parallelen Seiten sind 26 m und 22 m lang, und die Höhe mißt 18,5 m. Wie groß ist der Inhalt desselben?

9) Ein Kasten aus Blech ist 60 cm lang, 50 cm breit und 40 cm hoch. Wie tief sinkt derselbe im Wasser ein, wenn 1 qcm Blech 3 g wiegt?

10) Die Seiten zweier Quadrate verhalten sich wie 3 : 5 zu einander, und die Summe der Inhalte beider beträgt 2176 qm. Wie lang sind die Seiten derselben?

11) Ein cylindrisches Bassin von 6 m Radius und 5 m Höhe soll durch eine Röhre gefüllt werden, die in jeder Sekunde 0,5 Liter liefert. In welcher Zeit wird das Bassin voll sein?

12) Die Länge des Schattens eines Turmes ist $87^1/_2$ m; die Schattenlänge eines daneben stehenden Stabes von 2,95 m Höhe beträgt 2,5 m. Wie hoch ist der Turm?

13) Die Kanten zweier Würfel verhalten sich wie 2 : 3, und die Summe ihrer Inhalte beträgt 280 cbm. Welche Länge haben die Kanten?

14) Zwischen wieviel Punkten können höchstens 780 Gerade gezogen werden?

15) In welchem Vieleck sind 35 Diagonalen möglich?

16) Die Differenz zweier benachbarter Winkel in einem Rhomboid = 36°; wie groß jeder?

17) Ein Taucher von 140 qdm Oberfläche befindet sich in einer Tiefe von 25 m im Wasser; welchen Druck hat er auszuhalten?

18) Welchen Druck hat eine rechteckige Fläche von 0,7 m Länge und 0,4 m Breite in der Luft auszuhalten?

19) Die beiden parallelen Seiten eines Trapezes sind 18,4 m und 14,8 m lang und seine Höhe mißt 15 m; welchen Inhalt hat es?

20) Die Seiten eines ungleichseitigen Dreieckes sind 16 m, 30 m und 34 m lang; welchen Inhalt hat dasselbe?

Schriftlich.

1) Eine Pyramide aus Holz vom spez. Gewicht 0,8 ist 1,5 m hoch und hat zur Basis ein Quadrat, dessen Seite 0,9 m mißt. Aus derselben schneidet man eine kleine Pyramide heraus und füllt den hohlen Raum mit Blei vom spez. Gewicht 11,45 aus, so daß jetzt der ganze Körper 1186,650 kg wiegt. Welches Volumen hat die aus Blei bestehende Pyramide? (Ist algebraisch und arithmetisch zu lösen.)

2) Der in eine Ebene aufgerollte Mantel eines Kegels bildet einen Sektor, dessen Radius r m lang ist und dessen Zentriwinkel n° mißt. Wie groß ist das Volumen dieses Kegels? Nach der allgemeinen Lösung als Zahlenbeispiel r = 1,5 m und n = 120°.

3) „Ein Garten, der die Form eines Rhomboides besitzt, hat 1150,1 qm zum Inhalt; eine der kleineren Umfangsseiten mißt 23,2 m, und der Abstand der 2 größeren Umfangsseiten beträgt 21,7 m. Wie lang sind die beiden diagonalen Wege, die durch den Garten führen?"

4) Von zwei rechtwinkligen Höfen ist der zweite um 4,5 m breiter als der erste; die Länge eines jeden Hofes ist doppelt so groß, als die Breite des zweiten Hofes; zur Belegung beider Höfe sind 1881 Steinplatten, von denen jede 1 m lang und $^1/_2$ m breit ist, nötig. Welche Länge und Breite hat jeder Hof?

5) Eine massive Walze aus Messing vom spez. Gewicht s = 8,4 endigt an beiden Seiten in Halbkugeln, welche auf dieselbe passen und ebenfalls aus Messing von demselben spez. Gewicht bestehen. Die größte Länge dieses Körpers beträgt h = 5,1 m, und der

Durchmesser desselben mißt $d = 0{,}6$ m. Wie groß ist das Gewicht P dieses Körpers?

6) Ein cylindrischer Dampfkessel von 5,4 m Länge und 0,45 m Radius ist an beiden Enden durch Halbkugeln geschlossen, welche genau auf denselben passen. a) Wieviel Hektoliter Wasser sind nötig, um diesen Dampfkessel bis $^3/_4$ anzufüllen? b) Welchen Druck hätte derselbe auszuhalten, wenn er mit Dampf von 5 Atmosphären Spannung gefüllt wäre?

7) Der Durchmesser der Grundfläche eines cylindrischen Gefäßes beträgt $d = 0{,}4$ m. Dasselbe ist bis zur Höhe $h = 0{,}5$ m mit Wasser angefüllt. Bis zu welcher Höhe x steigt das Wasser in diesem Gefäß, wenn man in dasselbe eine Kugel wirft, die den Durchmesser $m = 0{,}3$ m hat und ganz im Wasser untersinkt?

8) Aus einem Baumstamme, welcher $h = 4{,}2$ m lang ist und dessen Endflächendurchmesser $D = 0{,}4$ m und $d = 0{,}3$ m messen, soll mit möglichst geringem Holzabfall ein cylindrisches Brunnenrohr gehauen werden; das Bohrloch des letzteren soll die Weite $d_1 = 0{,}06$ m bekommen. 1) Wie groß ist das Gewicht P des Baumstammes, wenn das Holz desselben das spez. Gewicht $s = 0{,}6$ hat? 2) Welches Gewicht p hat das fertige Brunnenrohr? 3) Wieviel cbm Holz gehen durch das Abhauen und Ausbohren verloren?

9) Ein Brunnenschacht, der $h = 12$ m tief ist und dessen Seitenkante $b = 8$ m beträgt, soll cylindrisch ausgemauert werden, und zwar soll der hohle Raum die Weite $d = 6$ m bekommen. Wie groß wird dann das Volumen V des Mauerwerks?

10) Aus einem quadratisch-parallelepipedischen Stück Holz soll unter Beibehaltung der Höhe ein gerader Kegel gedrechselt werden. Der Umfang jeder der beiden Grundflächen des prismatischen Holzstückes mißt $m = 0{,}6$ m und der Umfang einer der vier Seitenflächen $n = 1{,}02$ m. Wieviel beträgt der Abfall an Holz, wenn er möglichst gering werden soll?

11) Es soll ein Hügel, der die Form eines abgekürzten Kegels hat, abgetragen werden. Der Radius seiner unteren Grundfläche mißt $R = 6{,}4$ m, der der oberen Grundfläche $r = 2{,}8$ m und die Seitenlinie desselben beträgt $s = 6{,}9$ m. Zur Fortschaffung des Erdreichs benützt man einen Karren, dessen hohler Raum die Gestalt eines geraden Pyramidenstumpfes mit quadratischen Grundflächen hat; die Kanten der letzteren betragen im Lichten $a = 0{,}4$ m und

$b = 0{,}6$ m und die Entfernung der beiden Grundflächen voneinander mißt $h = 0{,}9$ m. 1) Wieviel cbm Erde enthält der Hügel? 2) Wieviel mal muß der Karren gefüllt werden, wenn sich die Masse des festen Erdreichs zur Masse des lockeren wie $m : n = 10 : 16$ verhält? 3) Um wieviel wird ein $p = 2{,}88$ a enthaltendes Grundstück, auf welches die Erde gleichmäßig verteilt wird, hiedurch erhöht?

12) Die Höhe eines geraden Cylinders beträgt $h = 3{,}2$ m und der Umfang desselben $u = 3{,}768$ m. Auf seinen beiden Grundflächen befinden sich Halbkugeln, welche diese Flächen zu größten Kreisen haben, und zwar beide außerhalb des Cylinders. Wie groß ist die Oberfläche O des ganzen Körpers?

13) Der Radius der als eine vollkommene Kugel betrachteten Erde beträgt $r = 860$ geographische Meilen. Wie groß ist derjenige Teil der Erdoberfläche, den man aus einem Luftballon übersehen kann, der sich bis zu einer Höhe von $h = 3{,}5$ Meilen über die Erde erhoben hat?

14) Die drei Höhen eines Dreieckes betragen 8, 10 und 12 m. Wie lang sind die Seiten desselben und welchen Inhalt hat es?

15) Die drei Seiten eines Dreieckes seien a, b und c; wie groß ist der Radius r des eingeschriebenen Kreises?

16) Aus den drei Seiten a, b und c eines Dreieckes soll der Radius R des demselben umgeschriebenen Kreises gesucht werden.

17) Es ist der sog. Ptolemäische Lehrsatz: „Im Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus je zwei gegenüberliegenden Seiten" — in Zeichen: $e \,.\, f = ac + bd$, wenn die vier Seiten mit a, b, c und d und die beiden Diagonalen mit e und f bezeichnet werden — zu beweisen.

18) Es soll der Inhalt eines Sehnenviereckes mit den Seiten a, b, c und d berechnet werden.

19) Eine Seite eines Dreieckes mißt 10 m; die zwei zu den anderen Seiten gehörigen Höhen sind 8 m und 4 m lang. Daraus sollen diese Seiten und der Inhalt berechnet werden.

20) Ein Fenster ist 0,6 m breit und 1,2 m hoch; hinter der Mitte desselben, 0,5 m von ihm entfernt, befindet sich ein Auge. Wie groß ist die Fläche, welche durch dieses Fenster in einer Entfernung von 400 m sichtbar ist?

21) Vor einem kreisförmigen Brette, dessen Durchmesser 0,4 m beträgt, befindet sich ein leuchtender Punkt, 1,6 m vom Mittelpunkt desselben entfernt. In welcher Entfernung vom leuchtenden Punkte hat der durch das Brett erzeugte Schatten einen Durchmesser von 4,2 m?

22) Die Seitenlänge einer quadratischen Wand beträgt 4,8 m. Dieser Wand gegenüber befindet sich in einer Entfernung von 6,4 m eine Lampe. Zwischen Lampe und Wand soll ein quadratischer Lichtschirm von 0,4 m Seitenlänge so aufgestellt werden, daß der Schatten desselben die Wand vollständig bedeckt. In welcher Entfernung von der Lampe muß man den Lichtschirm aufstellen?

23) Es bezeichne p die Brennweite eines Hohlspiegels, a die Entfernung eines leuchtenden Punktes vom Hohlspiegel und α die Bildweite. Welche Beziehung findet zwischen p, a und α statt, vorausgesetzt, daß der leuchtende Punkt in oder doch nahe der Hauptachse liegt und die den Spiegel treffenden Strahlen mit der Hauptachse einen sehr kleinen Winkel einschließen?

24) Ein Hohlspiegel hat eine Brennweite von 20 cm; wie weit ist das Bild eines Gegenstandes von demselben entfernt, wenn der Gegenstand selbst in einer Entfernung von 30 cm liegt?

25) Die Entfernung eines Gegenstandes von einem Hohlspiegel beträgt 100 cm, die seines Bildes 5 cm; wie groß ist die Brennweite des Spiegels?

26) Ein Goldstück von 10 mm Halbmesser und 1,5 mm Dicke läßt sich zu einem Goldblatt von 120 qm Oberfläche ausschlagen. Wie groß ist die Dicke dieses Goldblatts?

27) Die Mündung einer Flasche hat 20 mm, der Boden 68 mm Durchmesser. Welchen Druck erleidet der Boden, wenn der Stöpsel mit einer Kraft von 12 kg in die vollständig gefüllte Flasche eingetrieben wird?

28) Ein aus Eichenholz gefertigter, senkrechter Kegelstumpf ist 18 dm hoch. Die Höhe desselben wird in 3 gleiche Teile geteilt, und durch die Teilungspunkte legt man parallele Ebenen zu den Basen, so daß der Stumpf in 3 Teile zerfällt. Wie schwer ist jeder Teil, wenn das spez. Gewicht des Eichenholzes zu 1,2 angenommen wird und die Endflächenradien 14 dm, beziehungsweise 8 dm messen?

29) Ein Brunnen, dessen quadratischer Querschnitt die Seite 1,5 m hat, soll 10 m tiefer ausgeschachtet werden. Zur Herausschaffung des Erdreichs bedient man sich eines Eimers, der die Gestalt eines Kegelstumpfes hat. Der größere Durchmesser desselben mißt im Lichten 4 dm, der kleinere 2 dm, und die Länge der Seitenlinie beträgt 5 dm. Wie oft muß der Eimer gefüllt werden, wenn 11,3 Kubikeinheiten des festen Erdreichs 13,9 Kubikeinheiten des aufgelockerten Erdreichs ergeben?

30) Eine Wiese, welche die Form eines gleichschenkligen Trapezes besitzt, hat 116 m zum Umfang. Welches ist der Inhalt dieser Fläche, wenn die kleinere Parallelseite 23 m mißt und jede der nicht parallelen 24,5 m lang ist?

31) Die Radien zweier konzentrischer Kreise sind 5 m und 4 m lang. Wie lang ist die Sehne des größeren Kreises, welche zugleich als Tangente am kleineren Kreise erscheint? Wie groß ist das zu dieser Sehne gehörige Segment im größeren Kreise, wenn der Bogen 73° beträgt?

32) Die Grundkante eines geraden, 6seitigen Pyramidenstumpfes mißt 4,2 m, die Deckkante 2,5 m und eine Seitenkante ist 9,7 m lang. Wie groß ist die Oberfläche desselben?

33) Ein Garten besitzt die Form eines Rhomboides und hat einen Umfang von 240 m. Wenn die kleinere Diagonale 110 m mißt und eine der größeren Umfangsseiten 70 m lang ist, welches ist der Flächeninhalt des Gartens? Wenn dieser gegen ein gleichflächiges Grundstück, das ein reguläres Dreieck bildet, vertauscht werden soll, welchen Umfang muß letzteres haben?

Anhang I.

Die geometrische und algebraische Analyse.

I. Beziehung zwischen Lehrsätzen und Konstruktionsaufgaben.

Die Sätze der ebenen Geometrie zerfallen in zwei Hauptklassen, in Lehrsätze und in Aufgaben. Die ersteren drücken eine allgemeine geometrische Wahrheit aus, die durch Gründe bewiesen werden muß; die letzteren dagegen verlangen, aus gegebenen geometrischen Größen andere herzuleiten. Wird dies nur mittelst Zirkel und Lineal bewerkstelligt, so heißen sie Konstruktionsaufgaben; wird dies aber durch arithmetische und algebraische Operationen ausgeführt, so nennt man sie Rechenaufgaben.

Vergleicht man die Lehrsätze mit den Konstruktionsaufgaben, so ergibt sich, daß sie sowohl in Bezug auf ihren Inhalt, als auch ihre Form voneinander verschieden sind; in Bezug auf ihren Inhalt oder Stoff insofern, als die Lehrsätze die Eigenschaften gewisser Raumgrößen aussprechen, während die Aufgaben die graphische Darstellung von Raumgrößen mit bestimmten Eigenschaften verlangen; in Bezug auf die Form insofern, als jeder Lehrsatz ein allgemeiner Satz, und zwar entweder ein allgemein bejahender oder ein allgemein verneinender ist, während in der Aufgabe ausgedrückt wird, daß eine Raumgröße konstruiert werden soll, der bestimmte, ausdrücklich verlangte Eigenschaften zukommen. Doch ist dieser Unterschied kein wesentlicher, indem jeder Lehrsatz mehr oder weniger ungezwungen in die Form einer Aufgabe gebracht werden kann und umgekehrt. So verwandelt sich z. B. der Pythagoreische Lehrsatz: „In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate beider Katheten" in die Aufgabe: „Ein Quadrat zu konstruieren, welches gleich der Summe zweier gegebener Quadrate ist."

II. Auflösung der Konstruktionsaufgaben.

Eine Konstruktionsaufgabe auflösen heißt nachweisen, wie die gegebenen Stücke der aufgestellten Forderung gemäß verbunden werden müssen, und das Resultat der Verbindung in einer Figur

darstellen. Die Auflösung einer Aufgabe umfaßt demnach sowohl den Nachweis der mit den gegebenen Stücken vorzunehmenden Verbindungen als auch ihr Resultat, d. h. die Konstruktion selbst. Genauer betrachtet, zerfällt die methodische Auflösung einer Konstruktionsaufgabe in vier Teile, und zwar: in die Analyse, die Synthese, den Beweis und die Determination.

Die Analyse (Auflösung, Zergliederung) besteht darin, daß die Aufgabe als gelöst angenommen wird und die Beziehungen zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken aufgesucht werden; sie hat also den Zweck, die Konstruktion der gestellten Aufgabe auf planmäßige Weise zu finden. Was die Aufstellung einer Gleichung bei Auflösung einer Rechenaufgabe, das ist die Analyse bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben.

Die Synthese (Konstruktion) ist die graphische Darstellung des Gesuchten auf dem von der Analyse gefundenen Wege mittelst Lineal und Zirkel, und der in Worten ausgedrückte Nachweis derselben. Somit bildet sie die eigentliche Auflösung der Aufgabe.

Der Beweis hat zu zeigen, daß die nunmehr konstruierte Figur auch wirklich den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

In der Determination*) endlich wird die Möglichkeit und Bestimmtheit der Aufgabe untersucht. **)

III. Verschiedenheit der Analyse.

Es gibt eine Reihe geometrischer Aufgaben, die sogenannten Elementar- oder Fundamentalaufgaben, die zu ihrer Auflösung nichts weiter fordern, als die Erfüllung der Bedingungen, die von früheren Lehrsätzen her als die Annahmen der letzteren bekannt sind. Bei Aufgaben dieser Art ist die Auflösung durch die Kenntnis des betreffenden Lehrsatzes gegeben. Die Analyse besteht

---

*) Lat. determinatio, Abgrenzung, Festsetzung v. determinäre, abgrenzen.

**) Die Auflösungen geometrischer Aufgaben bestehen häufig nur aus drei Teilen: der Konstruktion, dem Beweis und der Determination, falls letztere nötig und möglich ist. Nur zu wissen, wie man eine Aufgabe auflöst, genügt dem strebsamen Schüler aber nicht; er hat vielmehr das Bedürfnis, zu erfahren, auf welche Weise man zur Auflösung einer Aufgabe gelangt; da ihn die Analyse hiemit bekannt macht, so ist seine Wißbegierde erst dann befriedigt, wenn zu den oben genannten drei Teilen einer Auflösung noch als vierter Teil die Analyse hinzukommt.

hier nur in dem Hinweis auf diesen, kann auch ganz wegfallen. Solche sind z. B. 1, 2 und 3 des § 5.

Diesen Elementaraufgaben stehen die zusammengesetzten Aufgaben gegenüber, Aufgaben, die nicht auf einen einzelnen und besonders aufgeführten Lehrsatz zurückgehen, sondern auf einer Verknüpfung mehrerer derselben untereinander beruhen. Bei solchen Aufgaben liegt die Auflösung nicht offen zu Tage; sie muß vielmehr erst aufgesucht werden. Der Weg, auf dem dies erreicht wird, ist die Analyse. In derselben kann die Beziehung zwischen den gegebenen und den gesuchten Größen mit Hilfe planimetrischer, algebraischer oder trigonometrischer Sätze aufgefunden werden. Demgemäß heißt die Analyse bezw. geometrische, algebraische und trigonometrische Analyse.

IV. Geometrische Analyse.

Dieselbe bietet zur Auffindung der Beziehungen zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken vorzugsweise folgende Hilfsmittel: 1) Lehrsätze, deren Beweis bereits früher im System geführt worden ist; 2) geometrische Örter; 3) Data; 4) die Reduktion der Aufgabe auf eine bekannte oder leichtere Aufgabe; 5) die Kombination zweier oder mehrerer der vorhergehenden Mittel. Mit Hilfe dieser Mittel sucht die geometrische Analyse zusammengesetzte Aufgaben auf rein geometrischem, d. h. konstruktivem Wege, aufzulösen.

a) Analyse durch richtige Benützung der bekannten geometrischen Lehrsätze.

Dieselbe besteht darin, daß man untersucht, auf welche Lehrsätze sich die betreffende Aufgabe zurückführen läßt, und daß man dann mit Hilfe derselben den Zusammenhang zwischen den gegebenen und gesuchten Größen feststellt. Daraus geht hervor, daß eine umfassende Kenntnis der Theorie der ebenen Geometrie die notwendige Voraussetzung zur Erreichung einer genügenden Gewandtheit in der Auflösung von Konstruktionsaufgaben bildet.

Wem z. B. der Satz: „Wenn man einen Schenkel des gleichschenkligen Dreieckes über die Spitze hinaus um seine eigne Länge verlängert und den Endpunkt dieser Verlängerung mit dem anderen Endpunkte der Basis verbindet, so steht diese Verbindungslinie senkrecht auf der Basis in ihrem Endpunkte“ bekannt ist, dem wird es leicht sein, für die hierauf beruhende Aufgabe die Auflösung zu finden. Oder: wer den Lehrsatz

kennt: „Wenn man durch einen Punkt einer Diagonale des Parallelogramms zwei Parallelen zu den beiden Paaren der Gegenseiten zieht, so sind von den vier dadurch entstandenen Parallelogrammen die beiden, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich," der wird auch leicht die Aufgabe: „Ein Parallelogramm in ein anderes winkelgleiches Parallelogramm mit einer gegebenen Seite zu verwandeln" zu lösen imstande sein. Auch für schwierigere Aufgaben ergibt sich häufig die Analyse unmittelbar aus einem Lehrsatz.

b) Analyse durch die geometrischen Örter.

Unter dem geometrischen Orte, kurzweg Orte eines Punktes versteht man eine gerade oder krumme Linie, welche die Eigenschaft hat, daß sämtliche auf ihr liegende Punkte, und außer ihnen kein anderer, einer gewissen Forderung Genüge leisten, welche jener Punkt erfüllen soll.

Beispiele geometrischer Örter eines Punktes sind folgende: 1) Der geometrische Ort eines Punktes, der von einem gegebenen Punkte A eine vorgeschriebene Entfernung a hat, ist die Kreislinie um A mit dem Radius a; 2) der geometrische Ort eines Punktes, der von zwei gegebenen Punkten A und B gleiche Entfernung hat, ist das Perpendikel in der Mitte der Linie AB; 3) der geometrische Ort eines Punktes der von einer geraden Linie L auf vorgeschriebener Seite derselben den Abstand a hat, ist die Parallele im Abstande a auf dieser Seite der Linie u. s. w.

Die Analyse durch die geometrischen Örter besteht darin, daß die Auffindung der gesuchten Größe von der Auffindung von Punkten abhängig gemacht wird, daß man also die Aufgabe zunächst auf Punktbestimmungen zurückzuführen sucht. Da nun die Lage eines Punktes durch zwei sich schneidende Örter jenes Punktes bestimmt ist, so bilden die geometrischen Örter ein wichtiges Erleichterungsmittel bei der Auflösung von Aufgaben.

c) Analyse durch Daten.

Stehen zwei oder mehrere Stücke einer Figur in Abhängigkeit voneinander, so daß aus den gegebenen andere, welche nicht gegeben sind, sich ableiten lassen, so nennt man diese letzteren Data, jedes einzelne derselben ein Datum*).

Beispiele von Daten sind: 1) Zu zwei Winkeln A und B eines

*) Datum (pl. data), lat., das Gegebene, vom lat. dāre, geben.

Dreieckes ist der dritte Winkel C ein Datum; 2) zu einem spitzen Winkel A des rechtwinkligen Dreieckes ist der andere B ein Datum; 3) zu einem Winkel des gleichschenkligen Dreieckes ist jeder andere ein Datum; 4) im Trapeze ist die Mittellinie ein Datum der beiden Grundlinien u. s. w.

Der Vorteil der Daten besteht darin, daß sie bei gegebenen Aufgaben die Analyse abkürzen, indem sie die gegebenen Bedingungen auf einfachere, welche durch sie gegeben sind, zurückführen. So läßt sich z. B. die Aufgabe: „Ein gleichschenkliges Dreieck aus der Grundlinie AB und dem Winkel p an der Spitze zu konstruieren" durch Kenntnis der Daten auf die folgende Aufgabe: „Ein Dreieck aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln zu konstruieren", zurückführen.

d) **Analyse durch Reduktion der Aufgabe auf eine leichtere oder bereits gelöste.**

Dieselbe besteht darin, daß man eine zusammengesetzte Aufgabe durch Zerlegung in ihre Bestandteile so lange umformt, bis man zu einer leichteren oder bereits bekannten Aufgabe gelangt. So lassen sich z. B. Parallelogrammaufgaben auf Dreiecksaufgaben, Trapezaufgaben auf die Konstruktion von Dreiecken und Parallelogrammen zurückführen.

Ein Beispiel soll den letzteren Fall erläutern: „Es soll ein Trapez aus den beiden parallelen Seiten AB und CD und den an der größeren von diesen beiden Seiten liegenden Winkeln a und b konstruiert werden". Denkt man sich diese Aufgabe als gelöst und zieht von dem Endpunkte D der kleineren von den beiden parallelen Seiten eine Linie DE || BC (der einen nichtparallelen Seite), so stellt sich heraus, daß sich aus der Differenz von AB und CD und den beiden Winkeln a und b ein Dreieck konstruieren läßt, das man dann leicht durch Anfügung eines Parallelogramms zu dem verlangten Trapez vervollständigen kann.

e) **Analyse durch Kombination zweier oder mehrerer der vorhergehenden Mittel.**

Dieselbe besteht darin, daß man zur Auflösung der vorgelegten Aufgabe mehrere der vorher genannten 4 Mittel benützt. Diese Art der geometrischen Analysen ist die gebräuchlichste, indem man hiedurch am schnellsten zur Auflösung der Aufgabe gelangt.

V. Algebraische Analyse.

Die Auflösung einer geometrischen Konstruktionsaufgabe durch algebraische Analyse besteht darin, daß man zunächst aus der unbekannten und den bekannten Größen, die man alle auf dasselbe Maß bezogen, also als Zahlengrößen sich vorstellt, eine Gleichung bildet, sodann dieselbe auflöst und endlich den für x gefundenen Wert konstruiert. Die algebraische Auflösung von Konstruktionsaufgaben zerfällt somit wesentlich in zwei Teile: in die Aufstellung und Auflösung der Gleichung, und die Konstruktion der gefundenen Formel.

a) Die Aufstellung und Auflösung der Gleichung.

Die zwischen den gesuchten Stücken, die man mit x, y u. s. w. bezeichnet, und den gegebenen Stücken, zu deren Bezeichnung man die Buchstaben a, b, c u. s. w. anwendet, aufzustellende Gleichung ergibt sich entweder direkt aus den Bedingungen der Aufgabe, oder man erhält sie mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes, der Sätze über Proportionen, Flächeninhalte u. s. w. Aus der aufgestellten Gleichung wird die zu suchende Unbekannte nach algebraischen Gesetzen entwickelt.

b) Die Konstruktion der Formel.

Die Konstruktion der durch Rechnung gewonnenen Formel besteht in der Herstellung einer geometrischen Größe, deren Maßzahl dem gefundenen algebraischen Ausdruck gleich ist. Auf Seite 38 und 39 sind die algebraischen Ausdrücke, welche für x gefunden werden können, zusammengestellt. Alle komplicierten Ausdrücke, auf welche die Lösung der Gleichungen 1. und 2. Grades führen, lassen sich auf diese reduzieren.

Bei der algebraischen Auflösung von Konstruktionsaufgaben ist der Beweis im allgemeinen entbehrlich, da die algebraische Methode für die Richtigkeit der Formel der Unbekannten bürgt und die Konstruktion dieser Formel mittelst bereits bewiesener Sätze ausgeführt wird. Doch ist es interessant, den durch Algebra gefundenen Gang durch rein planimetrische Sätze bestätigt zu sehen.

Anhang II.

Vollständige Auflösung von Konstruktionsaufgaben.

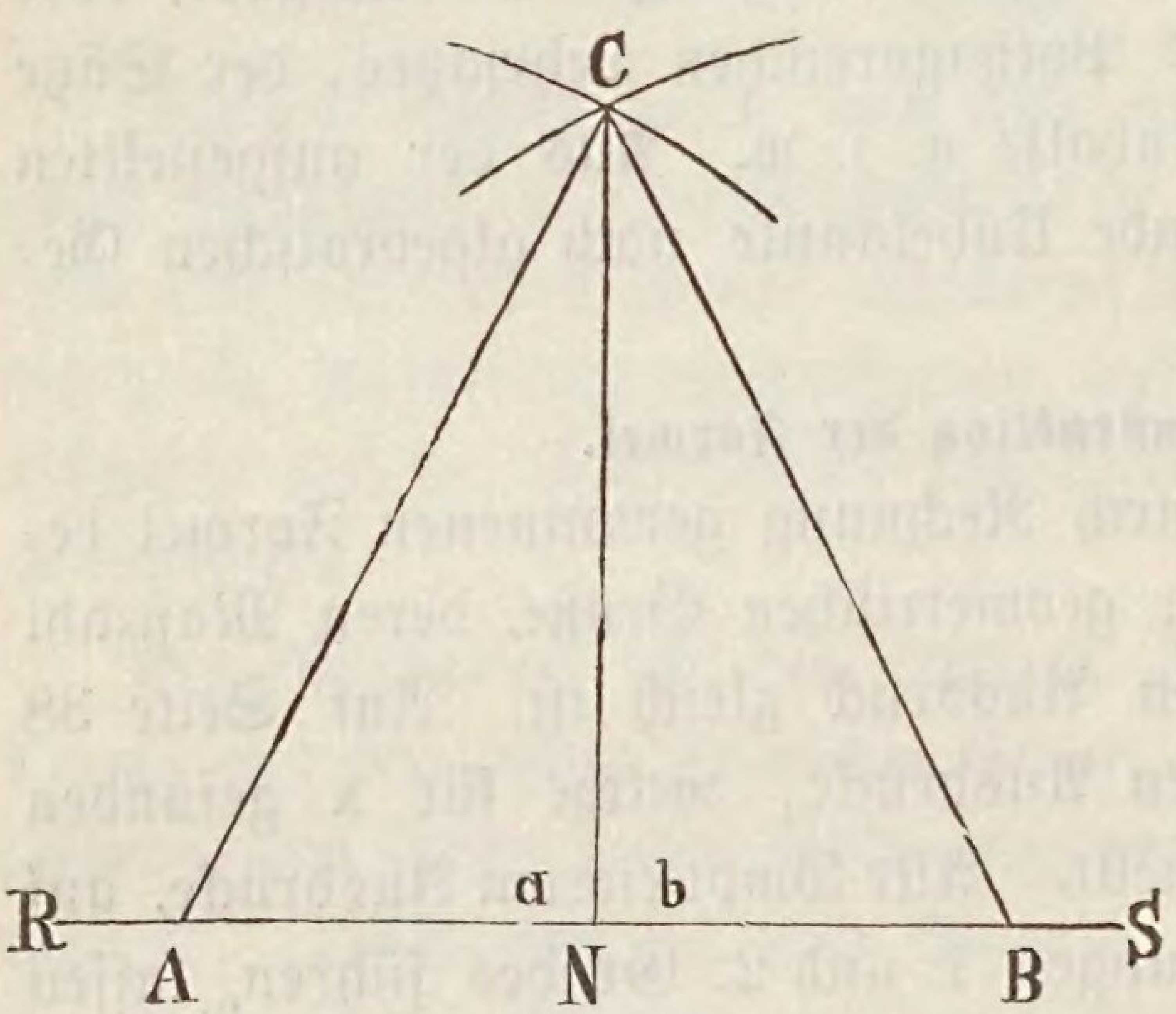
A. Auflösung von Aufgaben auf rein geometrischem Wege.

1) Von einem gegebenen Punkte N in einer gegebenen geraden Linie RS eine Senkrechte auf dieser Linie zu errichten.

a) Analyse. Dieselbe ist in folgendem Lehrsatz enthalten: „Die gerade Linie aus der Spitze des gleichschenkligen Dreieckes nach der Mitte der Grundlinie steht senkrecht auf der Grundlinie."

b) Konstruktion. Man schneidet auf der geraden Linie RS, Fig. 12, vom Punkte N aus, zu beiden Seiten desselben, zwei beliebige, einander gleiche Stücke NB und NA ab; beschreibt sodann aus A und B als Mittelpunkten mit einerlei, aber hinlänglich großem Radius zwei Kreisbögen, die sich in C schneiden, und zieht endlich die Gerade CN, so ist CN die verlangte Senkrechte.

Fig. 12.



c) Beweis. Derselbe folgt unmittelbar aus dem oben angeführten Lehrsatz, der als bewiesen betrachtet wird. Unabhängig von demselben geführt, heißt er also. Zieht man AC und BC, so ist:

AN = BN (nach Konstruktion).

Und AC = BC (aus demselben Grunde).

" CN = CN (nach dem Grunds.: Jede Größe ist sich selbst gleich).

Folglich △ ACN ≅ △ BCN (nach dem Kongruenzsatz: Wenn in 2 Dreiecken die drei Seiten gegens. gleich sind, so sind die Dreiecke kongruent).

Und daher $\angle a = \angle b$ (als in kongruenten Dreiecken gleichen Seiten gegenüberliegende Winkel).

Nun ist aber $\angle a + \angle b = 2R$ (nach dem Lehrsatz: Nebenwinkel betragen zusammen zwei Rechte).

Also $\angle a = R$
Und $\angle b = R$
Daher $CN \perp RS$
w. z. b. w.

(nach dem Satze: Sind die beiden Nebenw. einander gleich, so ist jeder ders. ein rechter Winkel und der gemeinsch. Schenkel steht senkrecht auf der geraden Linie, welche die beiden anderen Schenkel bildet).

d) Determination. Diese Aufgabe ist immer auflösbar.

2) Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem gegeben sind die Grundlinie M, ein Winkel p an derselben und die Summe S der beiden anderen Seiten.

a) Analyse. Angenommen, die Aufgabe sei gelöst, ABC, Fig. 13, das gesuchte Dreieck, und zwar $AB = M$, $\angle A = \angle p$ und $AC + BC = S$. Da man in demselben unmittelbar nur zwei Stücke kennt, nämlich die Seite AB und den $\angle A$, so kann dasselbe hieraus nicht konstruiert werden. Um das dritte gegebene Stück $AC + BC = S$ für die Auflösung benützen zu können, muß man dasselbe vor allem wirklich darstellen (in die Figur hinein zu bringen suchen). Zu dem Zweck verlängert man AC über C hinaus um ein Stück $CD = BC$, so daß $AD = S$ (gleich der gegebenen Summe der beiden Seiten) wird. Verbindet man nun D mit B, so erhält man ein Dreieck ABD, von welchem man drei Stücke kennt, nämlich $AD = S$, $AB = M$ und $\angle A = \angle p$. Dieses Dreieck kann man also aus den gegebenen drei Stücken konstruieren. Von dem so konstruierten Dreieck ABD kann man dann rückwärts zu dem Dreieck ABC gelangen; denn der Punkt C,

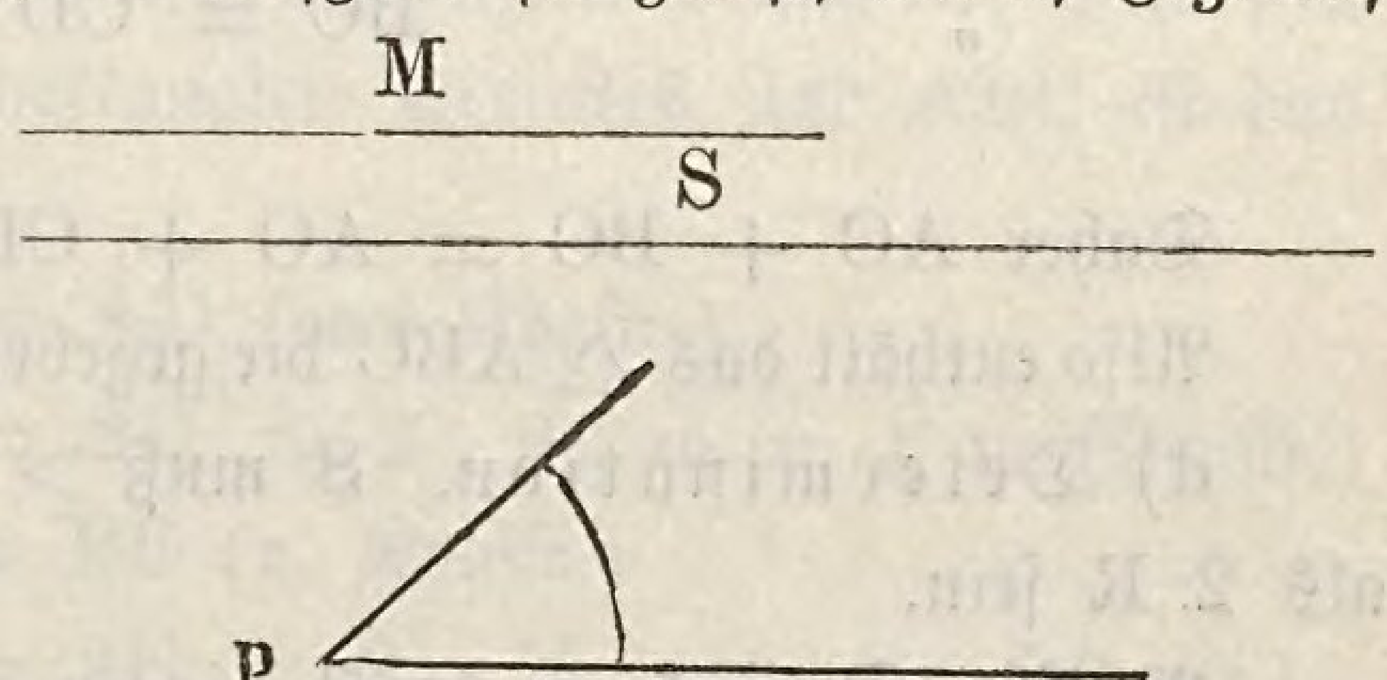
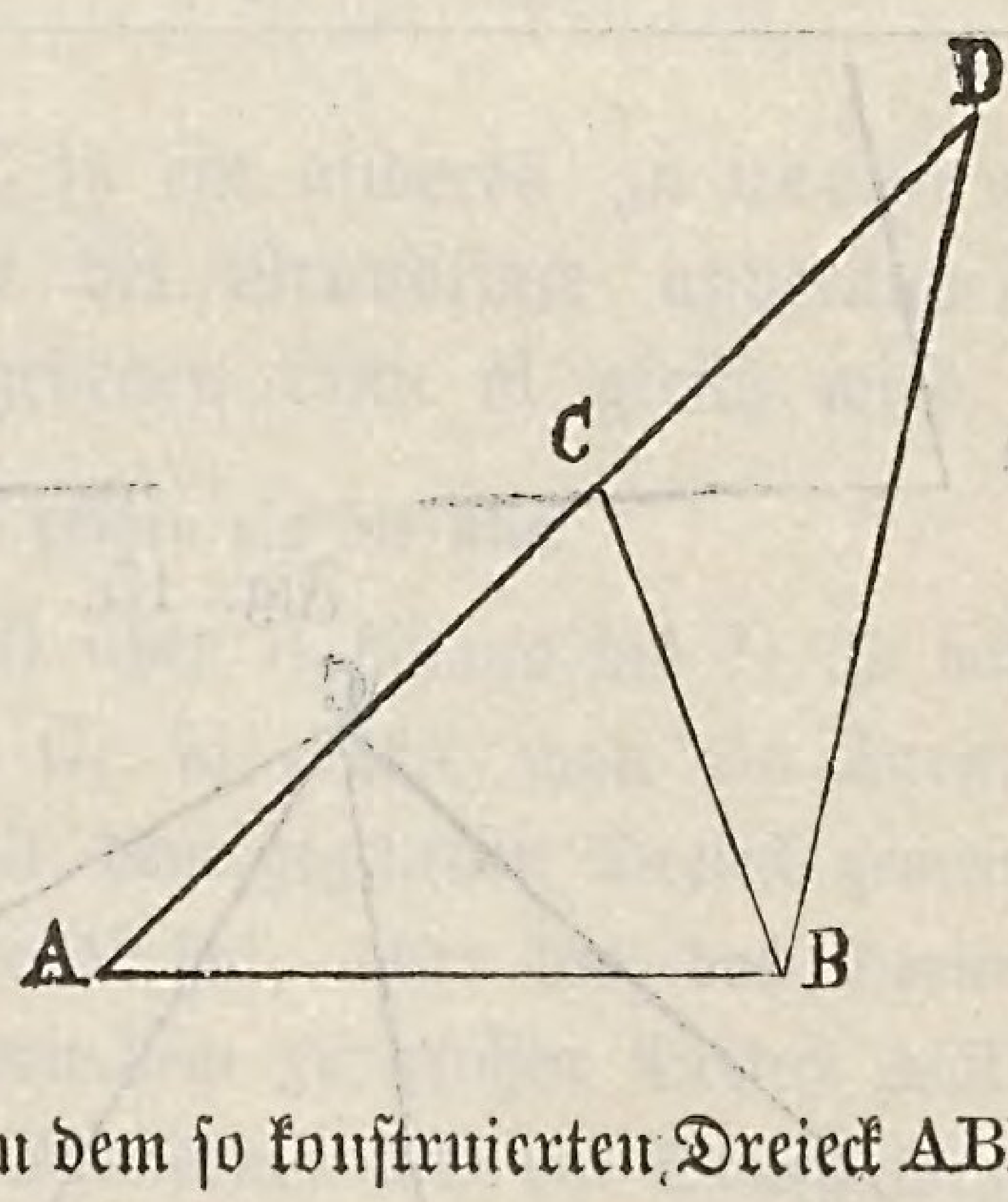
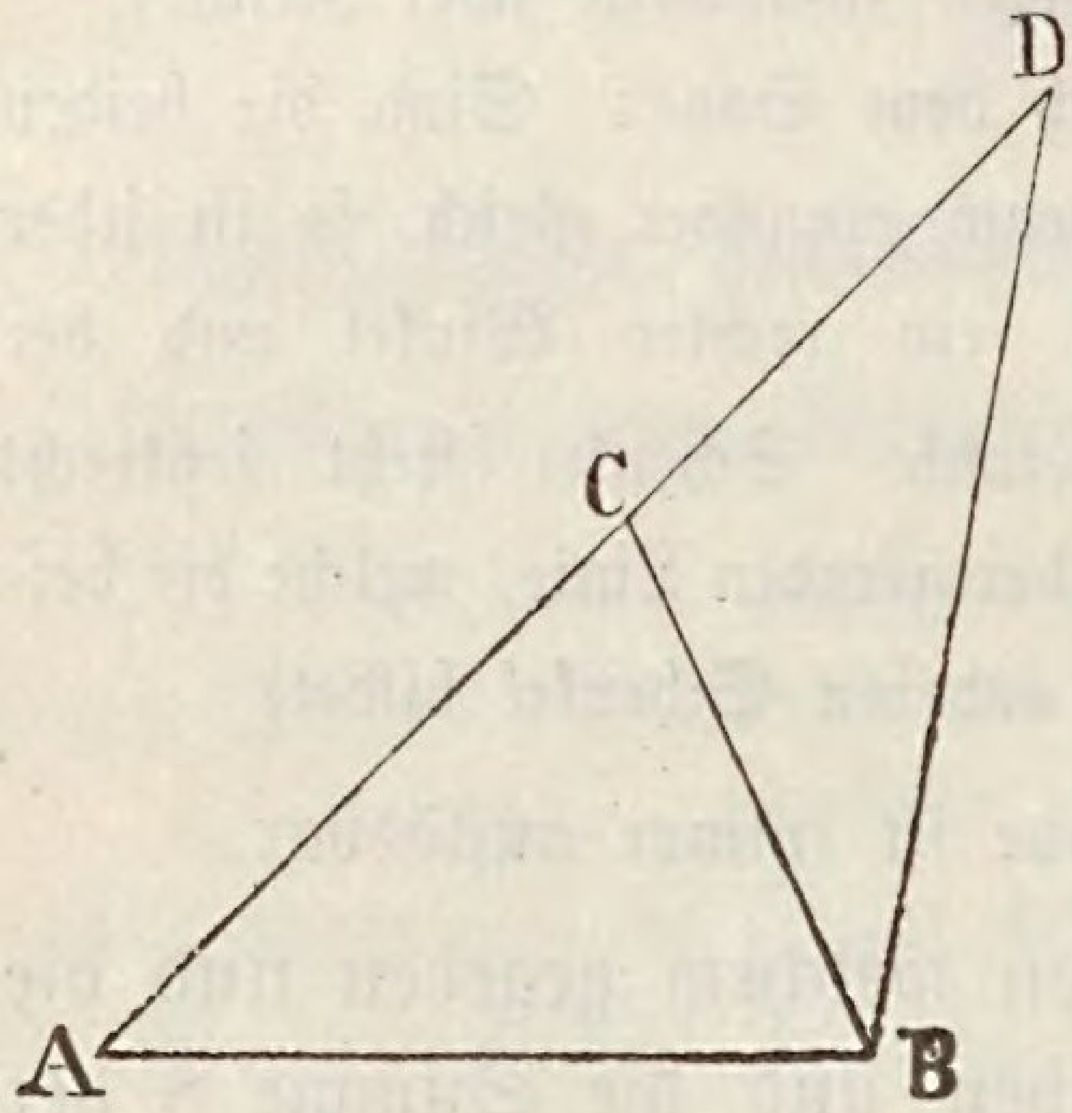


Fig. 13.



der dann allein noch fehlt, ergibt sich daraus, daß Seite CD = CB, also auch $\angle$ B = $\angle$ D ist.

Fig. 14.



b) Konstruktion. Man konstruiert aus M = AB, S = AD und $\angle$ p = $\angle$ A das Dreieck ABD, Fig. 14, legt an BD im Punkte B einen $\angle$ B = $\angle$ D so an, daß ein Schenkel desselben auf BD fällt. Der Durchschnittspunkt des anderen Winkelschenkels BC mit AD gibt den dritten Punkt C des zu suchenden Dreieckes und ABC ist das verlangte Dreieck.

c) Beweis. Es ist AB = M (nach Konstruktion).

Und $\angle$ A = $\angle$ p (desgleichen).

" BC = CD (denn $\angle$ B = $\angle$ D n. K., folglich $\triangle$ BCD gleichschenklig).

Daher AC + BC = AC + CD = AD = S (Konstruktion).

Also enthält das $\triangle$ ABC die gegebenen Bestimmungsstücke, w. z. b. w.

d) Determination. S muß > M und $\angle$ p muß immer kleiner als 2 R sein.

3) Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem gegeben sind die Summe S aller drei Seiten und zwei Winkel m und n.

a) Analyse. Angenommen, ABC, Fig. 15, sei das gesuchte Dreieck und CA + AB + BC = der gegebenen Summe S, $\angle$ CAB = m u. $\angle$ CBA = n. Um die gegebene Summe S der drei Seiten wirklich darzustellen, verlängert man AB über A hinaus um ein

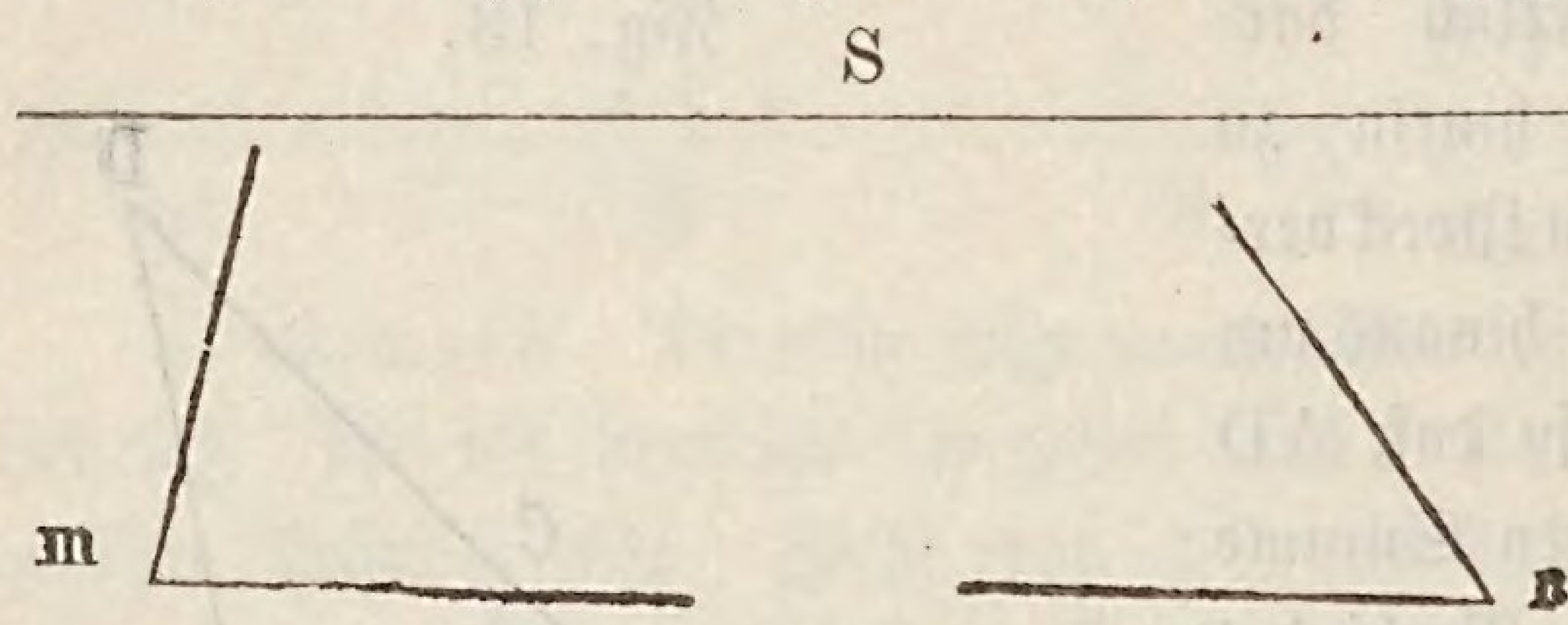
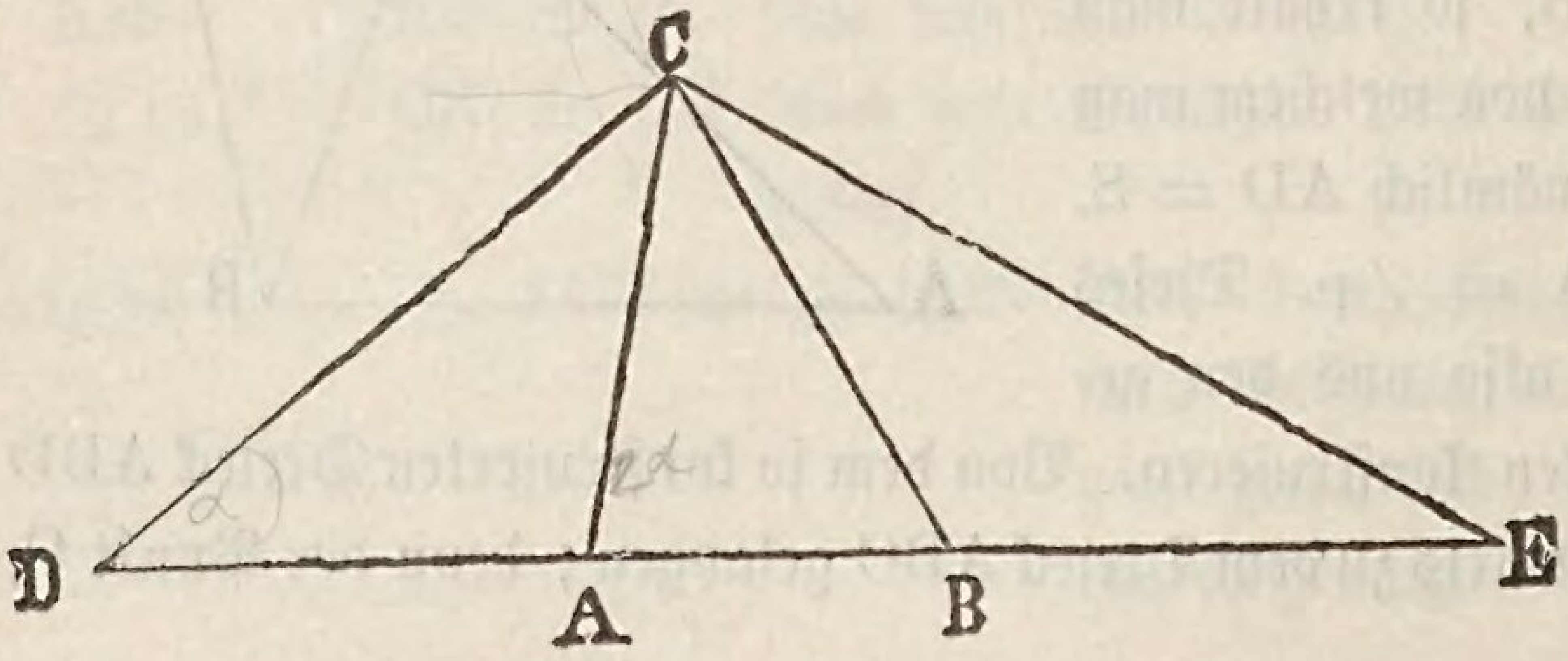


Fig. 15.



Stück AD = AC und über B hinaus um ein Stück BE = BC, so daß DE = der gegebenen Summe S wird. Verbindet man nun C mit D und E, so erhält man zwei gleichschenklige Dreiecke, nämlich CAD und BCE. In denselben sind die Winkel D und E an der Basis gleich den Hälften der zugehörigen Außenwinkel an der Spitze, d. h. gleich den Hälften der gegebenen Winkel CAB = m und CBA = n und damit selbst bekannt. Daher läßt sich das Dreieck CDE aus den gegebenen Stücken, nämlich aus der Seite S = DE und den Hälften der Winkel m und n konstruieren. Aus dem so konstruierten Dreieck CDE erhält man dann leicht das gesuchte Dreieck ABC.

b) Konstruktion. Man konstruiert aus der gegebenen Summe S = DE und aus den Hälften der gegebenen Winkel m : 2 = D und n : 2 = E das Dreieck CDE; C ist der eine Eckpunkt des zu suchenden Dreieckes. Legt man nun an die Seite CD und CE im Punkte C die Winkel D und E an, so schneiden die hieraus hervorgehenden Winkelschenkel CA und CB die Linie DE in den Punkten A und B. Dies sind die beiden anderen Eckpunkte des verlangten Dreieckes, und ABC ist das gesuchte Dreieck.

c) Beweis. Es ist AC = AD (nach Konstr.)
Und $\angle$ BAC = 2D = 2 . $^1/_2$ m = $\angle$ m (Konstr.)
Ebenso BC = BE (n. Konstr.)
Und $\angle$ ABC = 2E = 2 . $^1/_2$n = $\angle$ n (Konstr.)
Endlich AC + BC + AB = AD + BE + AB=DE=S (Konstr.).
Also enthält das $\triangle$ ABC die gegebenen Bestimmungsstücke, w. z. b. w.

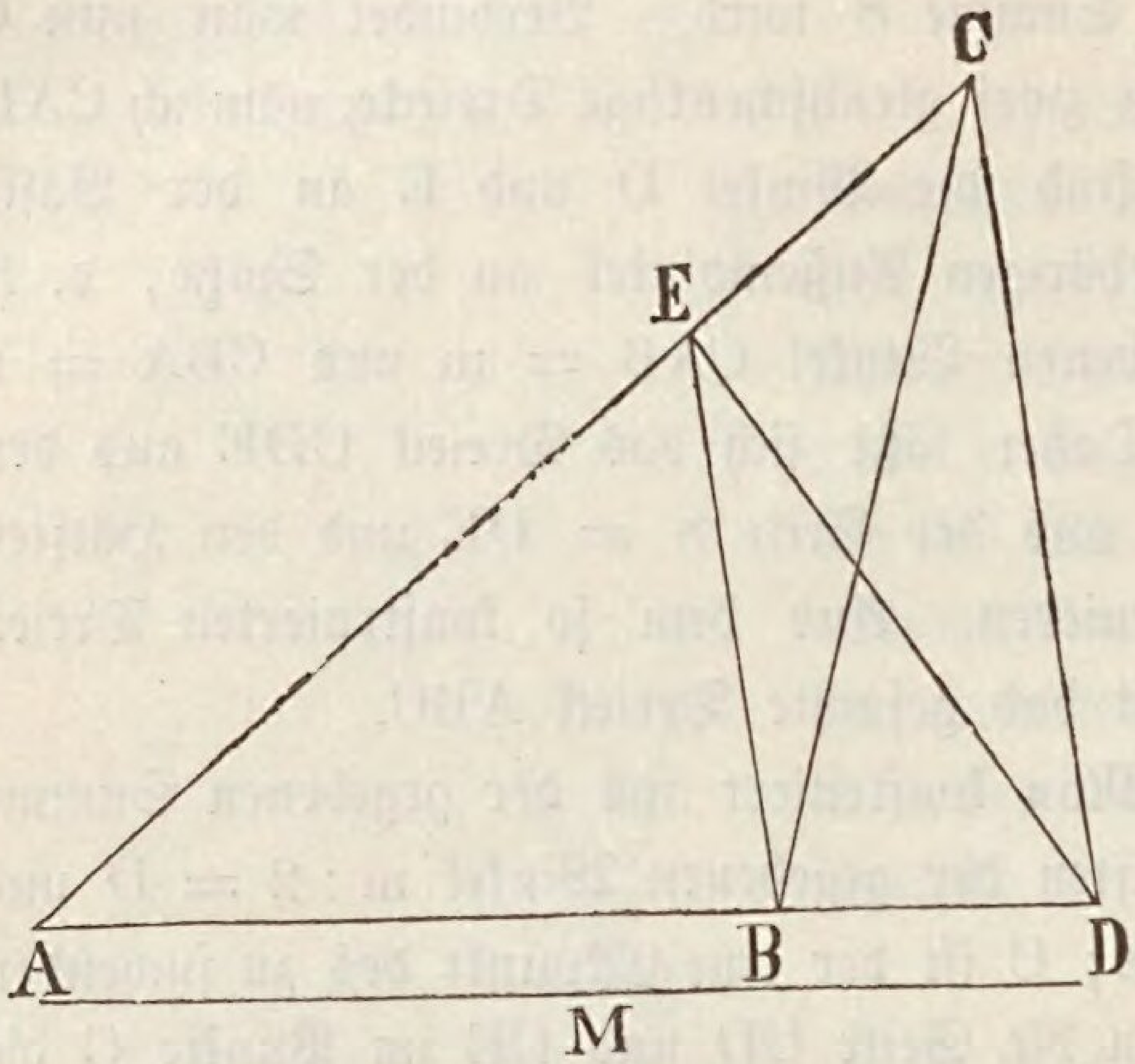
d) Determination. $\angle$ m und $\angle$ n müssen zusammen kleiner sein als 2 R.

4) Ein gegebenes Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, so daß ein Winkel, A, an der Grundlinie unverändert bleibt und die Grundlinie einer gegebenen Linie M gleich wird.

α) Die neue Grundlinie ist größer als die alte.

a) Analyse. Verlängert man AB über B hinaus bis D, so daß AD = M wird und verbindet D mit C, so erhält man ein Dreieck ADC, Fig. 16, das zwar den $\angle$ A mit dem gegebenen Dreieck gemein und auch die vorgeschriebene Grundlinie M hat, aber um das Dreieck BCD zu groß ist. Man muß daher von dem zu großen Dreieck ACD unter Beibehaltung des $\angle$ A und der Grundlinie AD ein Dreieck wegnehmen, das dem Dreieck BCD gleich ist. Da nun zwei Dreiecke über

Fig. 16.



derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallelen einander gleich sind, so erhält man ein dem Dreieck BCD gleiches, wenn man durch B eine Linie BE || CD zieht und D mit E verbindet.

b) Konstruktion. Man macht AD gleich M, zieht CD, sodann BE || CD und endlich DE; ADE ist nun das verlangte Dreieck.

c) Beweis. Es ist △ ACD = △ ACD (n. d. Grds.: Jede Größe ist sich selbst gleich).

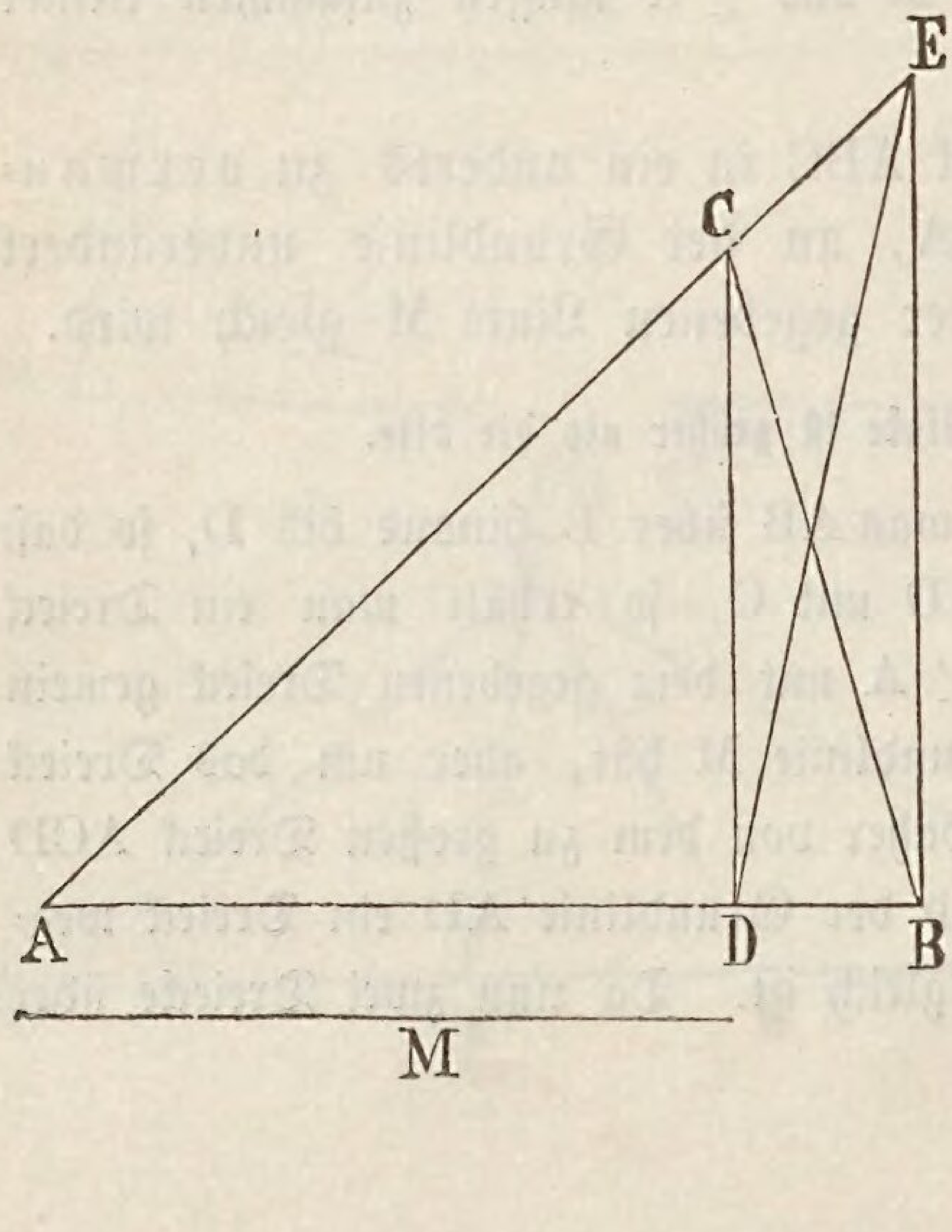
Und △ CDE = △ BCD (n. d. Ls.: Zwei Dreiecke über derselben Grundlinie u. s. w.)

Folglich △ ACD — △ CDE = △ ACD — △ BCD (n. d. Grs.: Gleiches auf gleiche Weise verändert, bleibt gleich).

Das ist △ ADE = △ ABC, w. z. b. w.

β) Die neue Grundlinie ist kleiner als die alte.

Fig. 17.



a) Analyse. Wenn man M auf AB von A aus abträgt, so daß AD = M wird, und D mit C verbindet, so erhält man das Dreieck ACD, Fig. 17. Dasselbe hat zwar die Grundlinie M und den ∠ A, ist aber um Dreieck BCD zu klein. Man muß mithin zu dem zu kleinen Dreieck ACD unter Beibehaltung des ∠ A und der Grundlinie AD ein Dreieck setzen, das dem Dreieck BCD gleich ist. Zu dem Zweck zieht man durch B eine

Parallele BE zu CD und zieht ED; △ CDE ist nun das dem △ BCD gleiche.

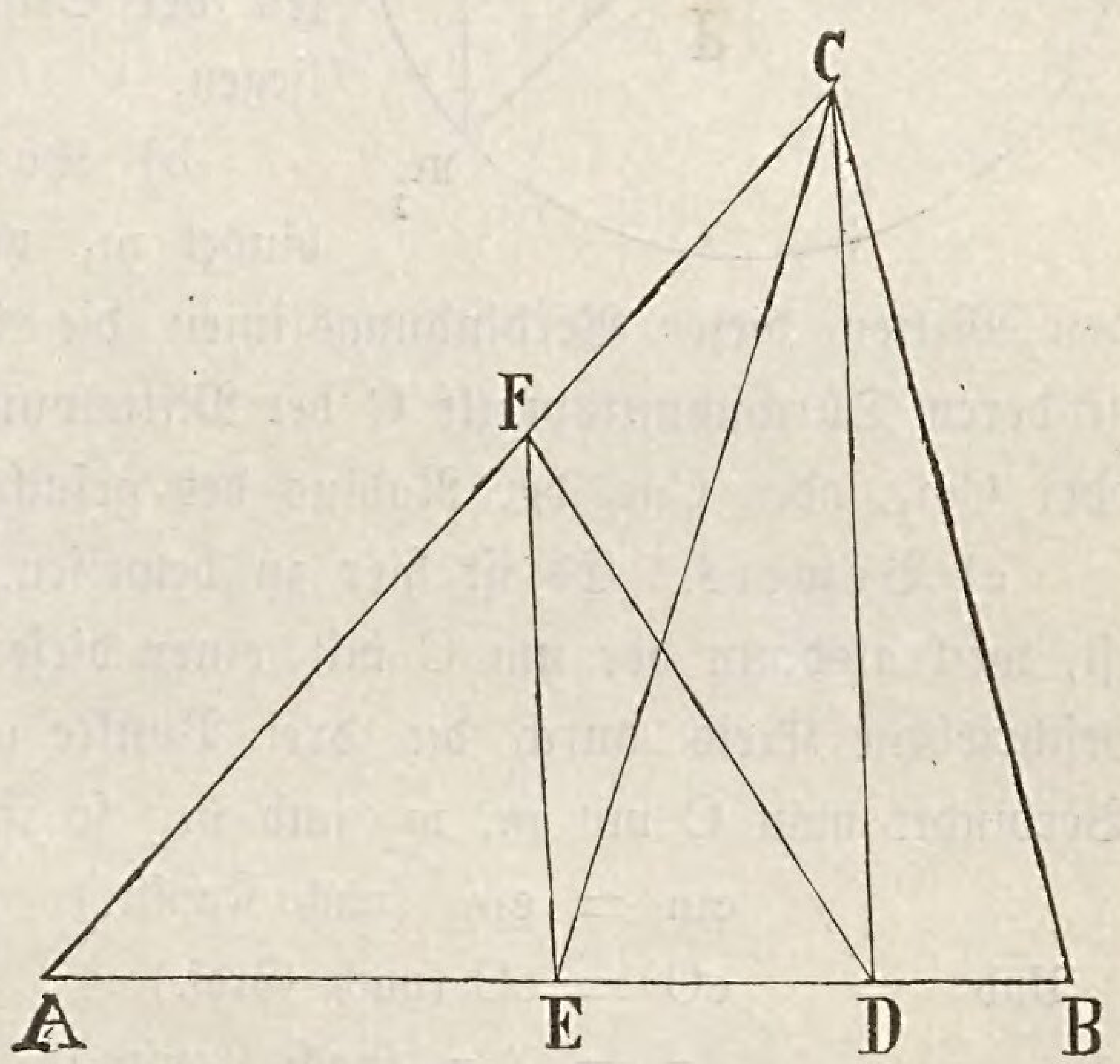
b) Konstruktion. Man macht AD = M, zieht CD, sodann BE || CD und endlich DE; ADE ist nun das verlangte Dreieck.

c) Beweis. Es ist △ ACD = △ ACD (n. Grundſ.)
Und △ CDE = △ BCD (als Dreiecke über derſ. Grundl. u. ſ. w.)
Folglich △ ACD + △ CDE = △ ACD + △ BCD (n. Grdſ.)
Das ist △ ADE = △ ABC, w. z. b. w.

5) Ein Dreieck ABC von einem in einer Seite liegenden Punkte D aus in zwei gleiche Teile zu teilen.

a) Analyse. Teilt man die Seite AB, Fig. 18, auf welcher D liegt, in zwei gleiche Teile und verbindet den Halbierungspunkt E mit C, so wird durch CE das Dreieck ABC halbiert. Es kommt nun offenbar darauf an, das Dreieck ACE, die Hälfte des Dreieckes ABC, in ein anderes Dreieck über der Grundlinie AD zu verwandeln. Verbindet man D mit C, so erhält man das Dreieck ACD über der Linie AD.

Fig. 18.



Da dasselbe um das Dreieck CDE zu groß ist, so muß von ihm ein dem Dreieck CDE gleiches weggenommen werden. Dieses wird erhalten, wenn man durch E zu CD die Linie EF parallel zieht und F mit D verbindet.

b) Konstruktion. Man halbiert AB in E, zieht CE und CD, sodann EF || CD und endlich DF, so ist △ ADF = △ ACE = Viereck BCDF = $^1/_2$ △ ABC.

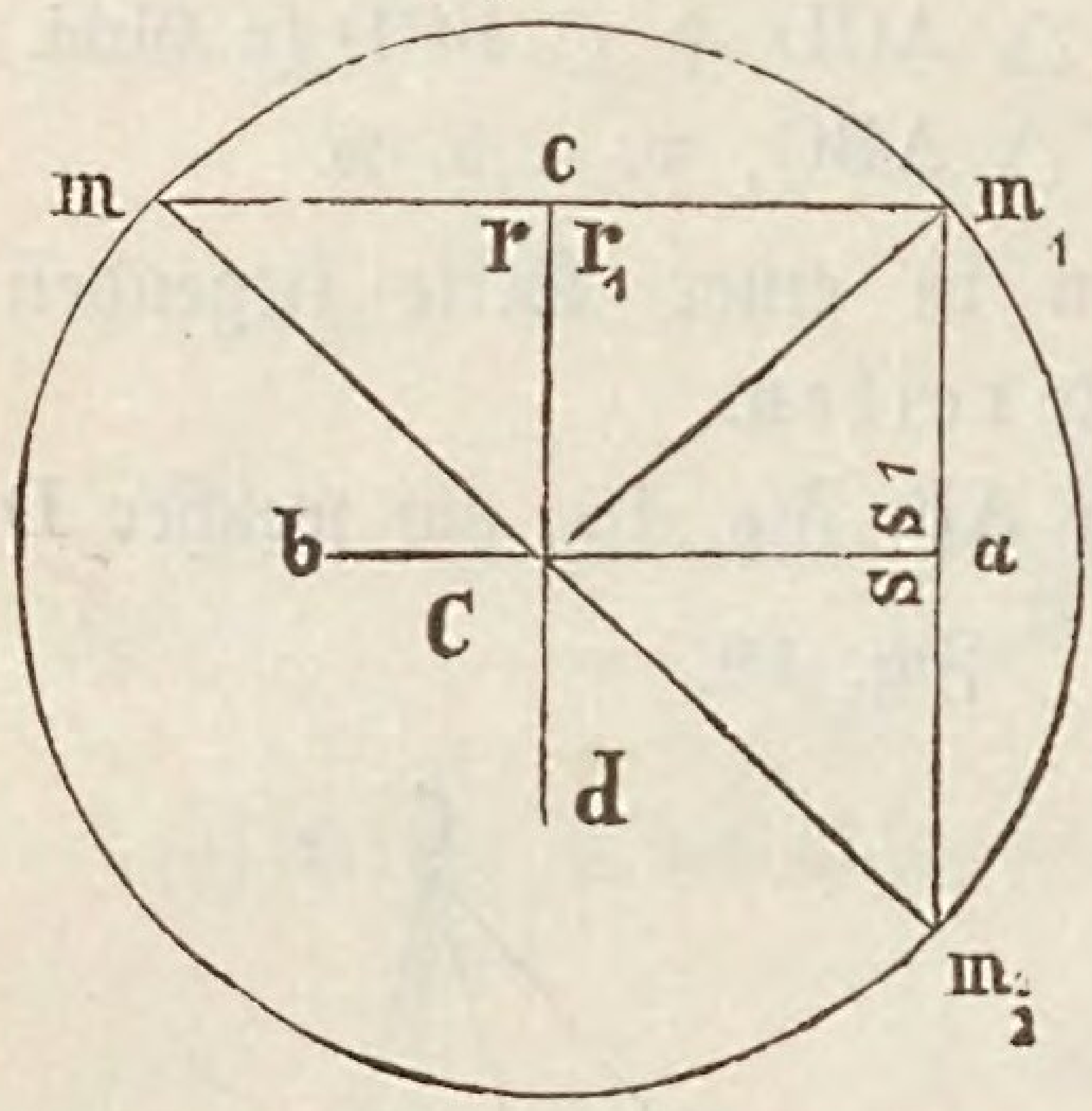
c) Beweis. Es ist △ ACD = △ ACD (n. Grdſ.)
Und △ CDF = △ CDE (gl. Grdl. u. Höhe).
Daher △ ACD — △ CDF = △ ACD — △ CDE (n. Grdſ.)
Das ist △ ADF = △ ACE

Nun ist aber △ ACE = ½△ ABC (denn AE = BE).
Folglich auch △ ADF = ½△ ABC (n. Grds.)
Also auch △ ADF = Viereck CBDF, w. z. b. w.

6) Man soll einen Kreis konstruieren, der durch drei gegebene Punkte m, m_1 und m_2 geht.

a) Analyse. Angenommen, die Aufgabe sei gelöst und C, Fig. 19, wäre der Mittelpunkt des zu konstruierenden Kreises. Dieser Mittelpunkt ist dadurch bestimmt, daß die Verbindungslinien je zweier der gegebenen Punkte m, m_1 und m_2 Sehnen des gesuchten Kreises sind; denn das Zentrum eines Kreises muß auf den in den Mitten der Sehnen errichteten Senkrechten liegen.

Fig. 19.



b) Konstruktion. Man verbindet m_1 mit m und m_2, errichtet in den Mitten dieser Verbindungslinien die Senkrechten ab und cd, so ist deren Durchschnittspunkt C der Mittelpunkt und die Entfernung Cm, oder Cm_1, oder Cm_2 der Radius des gesuchten Kreises.

c) Beweis. Es ist hier zu beweisen, daß $Cm = Cm_1 = Cm_2$ ist, weil alsdann der um C mit einer dieser Entfernungen als Radius beschriebene Kreis durch die drei Punkte m, m_1 und m_2 gehen muß. Verbindet man C mit m, m_1 und m_2, so ist

$cm = cm_1$ (nach Konstr.)
Und $cC = cC$ (nach Grds.)
„ $\angle r = \angle r_1$ (nach Konstr.)
Folglich $\triangle Ccm \cong \triangle Ccm_1$ (1. Kongrs.)
Und daher $Cm = Cm_1$ (als in kong. Dr. gl. W. gegenl. Seiten).
Ebenso $Cm_1 = Cm_2$
Also auch $Cm = Cm_2$ (nach Grds.)
Es ist also $Cm = Cm_1 = Cm_2$, w. z. b. w.

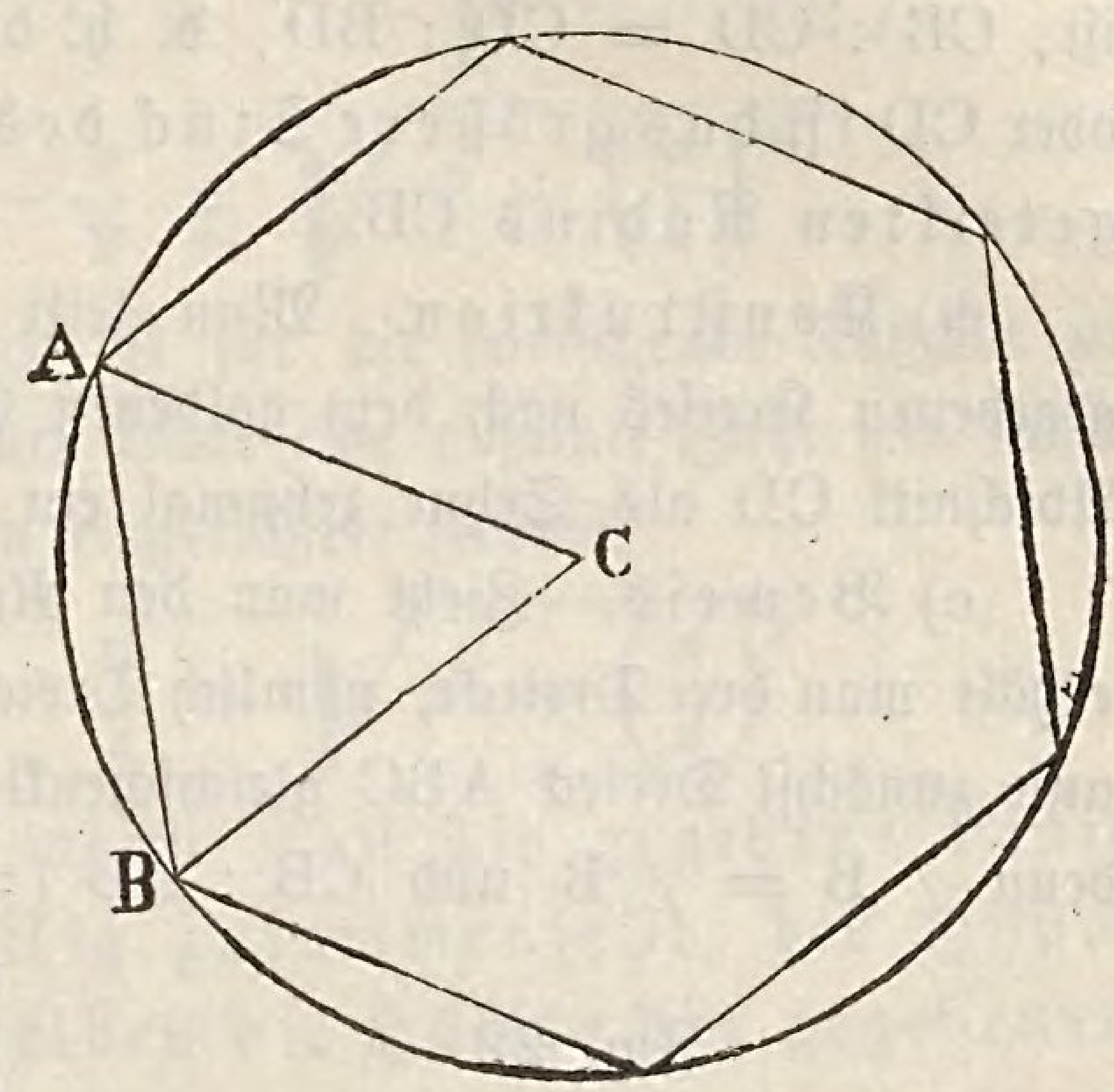
d) Determination. Die drei Punkte dürfen nicht in einer geraden Linie liegen.

7) In einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Sechseck einzuschreiben.

a) Analyse. Der Zentriwinkel des regelmäßigen Sechseckes ist 4R : 6 = 60°, mithin der Winkel an der Basis des Dreieckes CAB,

Fig. 20, in dem AB die Seite des einzuschreibenden regulären Sechseckes sei (180 — 60) : 2 = 60°; folglich ist dieses Dreieck gleichseitig, d. h. die Seite des regelmäßigen Sechseckes ist gleich dem Radius.

Fig. 20.



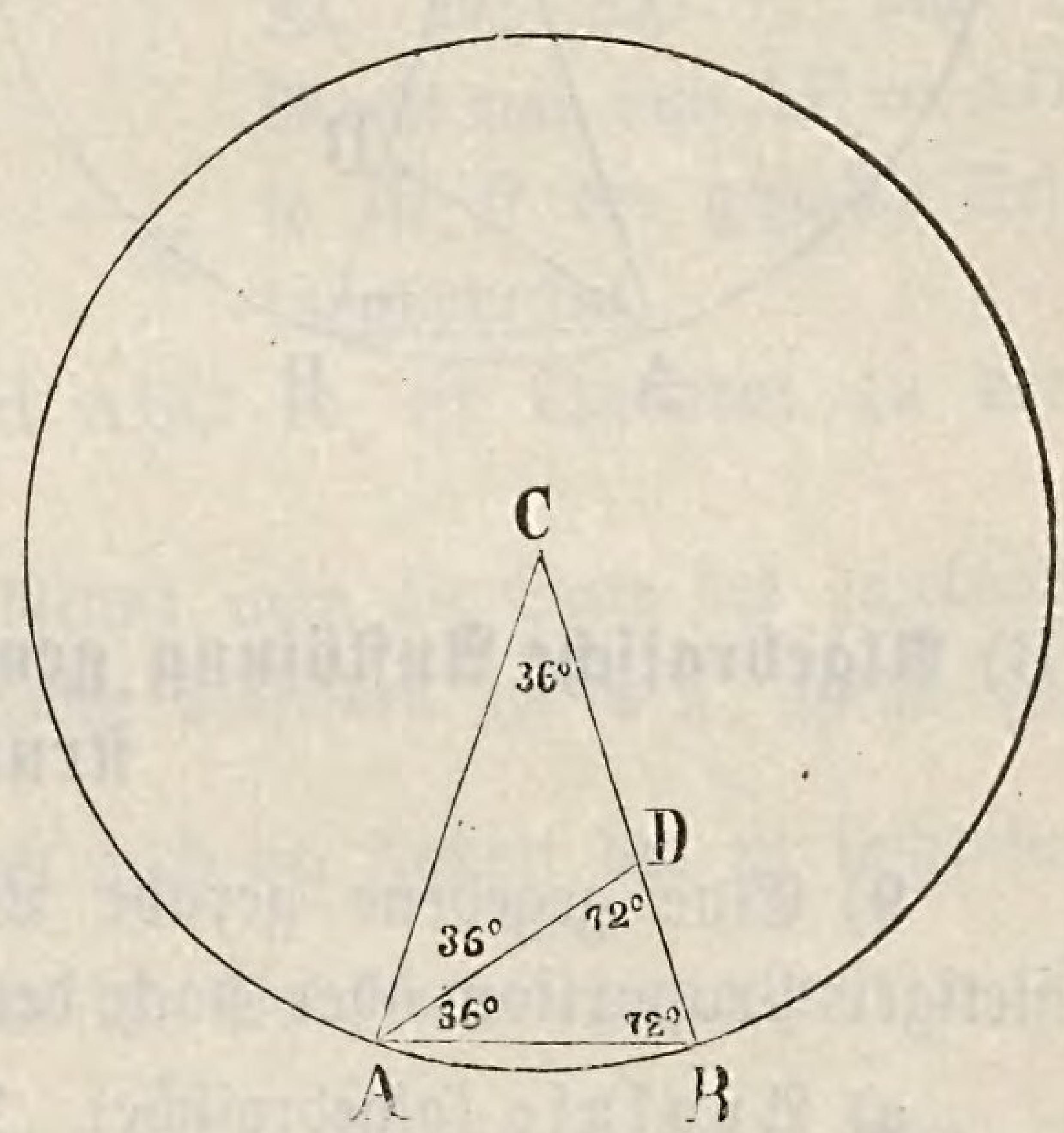
b) Konstruktion. Man trägt den Radius CA als Sehne in den Kreis ein; die Aufeinanderfolge solcher Sehnen bildet das regelmäßige Sechseck.

c) Beweis. Zieht man von C die beiden Radien CA und CB nach den Endpunkten der Sehne AB, so ist das so entstandene Dreieck CAB gleichseitig (n. Konstr.) und darum ∠ ACB = 60° = 4R : 6, und deshalb der Bogen AB der 6. Teil der Peripherie.

8) In einen Kreis ein regelmäßiges Zehneck einzuschreiben.

a) Analyse. Angenommen, AB, Fig. 21, sei die Seite des einzuschreibenden regelmäßigen Zehneckes. Verbindet man A und B mit C, so ist Dreieck ABC gleichschenklig und darum ∠ A = ∠ B. Nun muß aber ∠ C = 4R : 10 = 36° sein, folglich ist ∠ A = ∠ B = (180—36) : 2 = 144 : 2 = 72 = 2. ∠ C. Es kommt nun weiter darauf an, sich ein dem Dreieck ABC ähnliches Dreieck zu verschaffen, um zu erfahren, welche Beziehung zwischen AB und dem Radius CB des Kreises stattfindet.

Fig. 21.



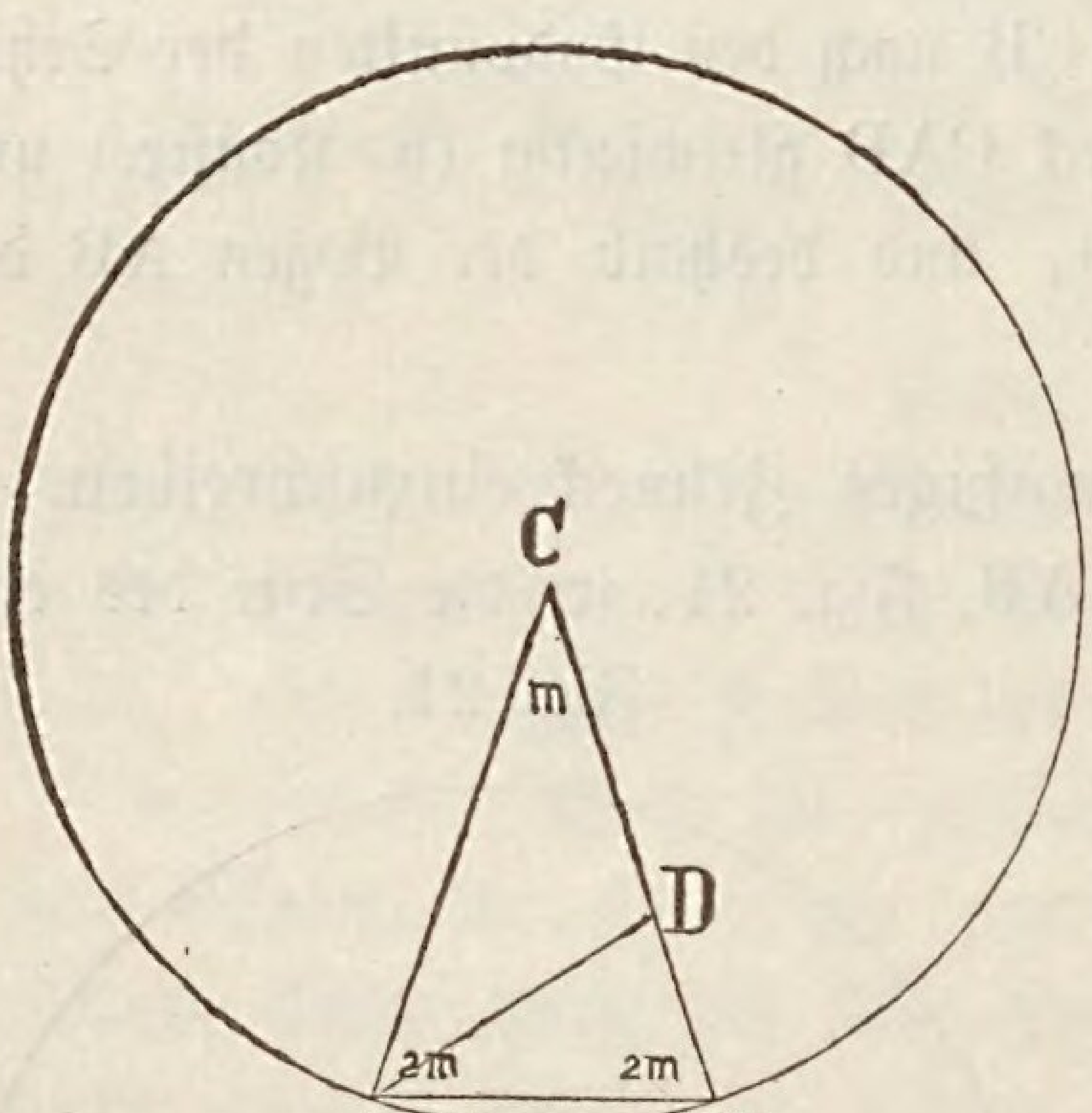
Ein dem Dreieck ABC ähnliches Dreieck erhält man, wenn man den ∠ A halbiert und die Halbierungslinie AD zieht; denn alsdann ist, weil ∠ DAB = 36° und ∠ B = 72° ist, auch ∠ ADB = 72°; folglich ist △ ABD gleichschenklig und dem Dreieck CAB ähnlich. Es ist aber auch △ ACD gleichschenklig, weil ∠ CAD = 36° = ∠ ACD ist. Somit ist AB = AD = CD. Da △ CAB ∼ △ ABD ist, so folgt

hieraus die Proportion CB : AB = AB : BD, oder weil AB = CD ist, CB : CD = CD : BD, d. h. die Seite des Zehneckes AB oder CD ist das größere Stück des nach dem goldenen Schnitt geteilten Radius CB.

b) Konstruktion. Man teilt den Radius CB, Fig. 22, des gegebenen Kreises nach dem goldenen Schnitt, und trägt den größeren Abschnitt CD als Sehne zehnmal ein.

c) Beweis. Zieht man den Radius AC und die Linie AD, so erhält man drei Dreiecke, nämlich Dreieck ABC, ABD und ACD. Es ist nun zunächst Dreieck ABC gleichschenklig; ferner ist $\triangle ABC \sim \triangle ABD$, denn $\angle B = \angle B$ und CB : AB (= CD) = AB (= CD) : BD; mithin ist auch $\triangle$ ABD gleichschenklig und darum AD = AB. Da nun AB = CD und AB = AD ist, so ist auch AD = CD; darum auch $\triangle$ ACD gleichschenklig. Bezeichnet man nun den $\angle$ bei C mit m, so ist $\angle$ ADB als Außenwinkel = 2m, mithin auch $\angle B = 2m$ und $\angle CAB = 2m$. Demnach betragen die drei Winkel des Dreieckes ABC = m + 2m + 2m = 5m = 2R oder 10m = 4R, m ist also 4R : 10 = 36° und darum AB die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes.

Fig. 22.



B) Algebraische Auflösung geometrischer Aufgaben nebst Konstruktion.

9) Eine gegebene gerade Linie AB = a im Punkte P nach stetiger Proportion oder nach dem goldnen Schnitt zu teilen (S. 39).

a) Analyse (algebraische). Nennt man AP, den größeren Teil, x, so ist BP, der kleinere Teil, a—x; mithin ergibt sich:

$$(a - x) : x = x : a$$

Oder: $$x^2 = a^2 - ax$$

Transponiert: $$x^2 + ax = a^2$$

Quadr. ergänzt: $$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Beide Seiten radiziert: $x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

Transponiert: $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

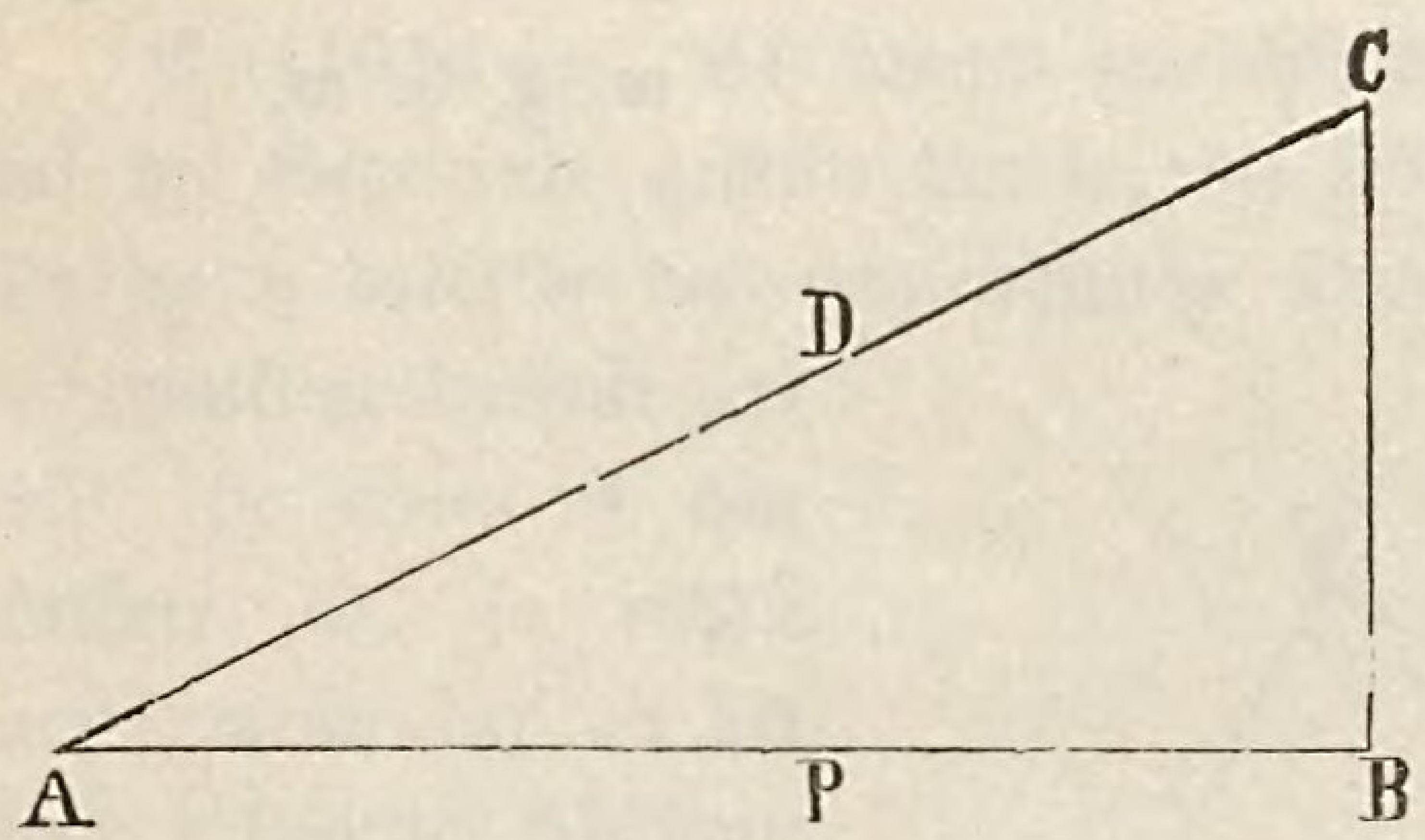
Das „—" vor dem Wurzelzeichen ist für die vorliegende Aufgabe zu verwerfen, da x als Maßzahl einer Linie eine absolute Zahl sein muß. Daher ist die für die Konstruktion eingerichtete Formel

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Hiernach wird x gefunden, wenn man die gegebene Linie und ihre Hälfte rechtwinklig zusammensetzt, die Hypotenuse zieht und von derselben die Hälfte der gegebenen Linie wegnimmt.

b) Konstruktion. Man errichtet im Endpunkt B, Fig. 23, der Linie AB = a ein Lot BC = ½a, zieht die Hypotenuse AC $= \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ und schneidet BC = ½a von AC ab; AD ist nun x. Macht man nun AP = AD, so ist P der gesuchte Teilungspunkt.

Fig. 23.

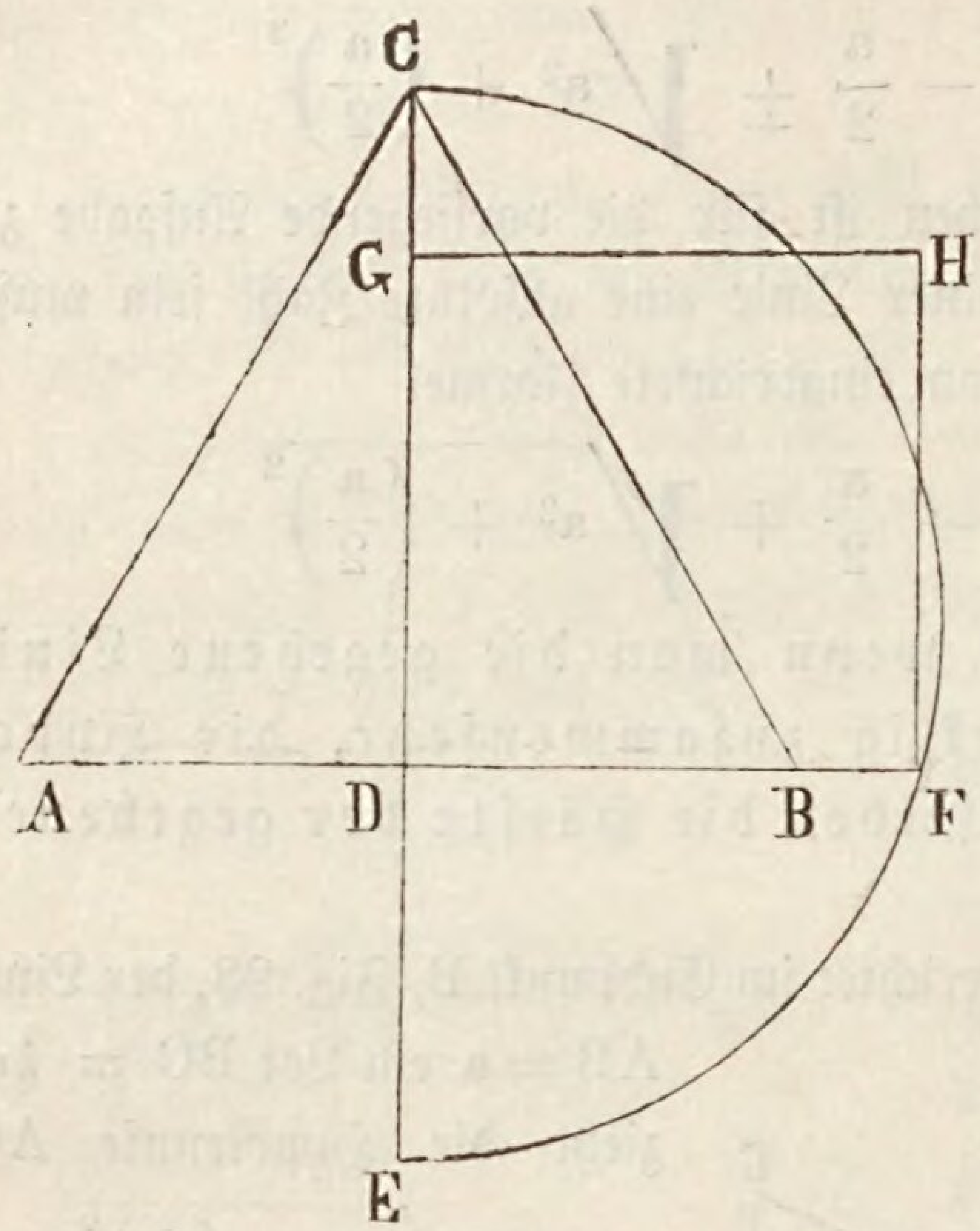


10) Ein gleichseitiges Dreieck ABC in ein Quadrat zu verwandeln.

a) Analyse (algebraische). Nennt man die Seite des gegebenen gleichseitigen Dreiecks a, so ist die Höhe desselben $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, mithin sein Inhalt $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$. So groß muß auch der Inhalt des zu suchenden Quadrats sein. Bezeichnet man nun die Seite des letzteren mit x, so muß sein $x^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Statt dieser Gleichung kann man die folgende Proportion setzen $\frac{a}{2}\sqrt{3} : x = x : \frac{a}{2}$. Hiernach ist die zu suchende Quadratseite die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Höhe und halben Basis des gegebenen Dreieckes.

b) Konstruktion. Man verlängert, Fig. 24, die Höhe CD = $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ des gleichseitigen Dreieckes um $\frac{1}{2}a$ bis E, beschreibt über CE einen Halbkreis und verlängert BD bis F; DF ist nun gleich x, und DFGH das Quadrat, welches so groß wie das gleichseitige Dreieck ABC ist.

Fig. 24.



c) Beweis (der Konstruktion).

Es ist DF $\perp$ CE
daher CD : DF = DF : DE
(n. Lehrs.)

oder $\frac{a}{2}\sqrt{3} : x = x : \frac{a}{2}$

w. z. b. w.

Anhang III.

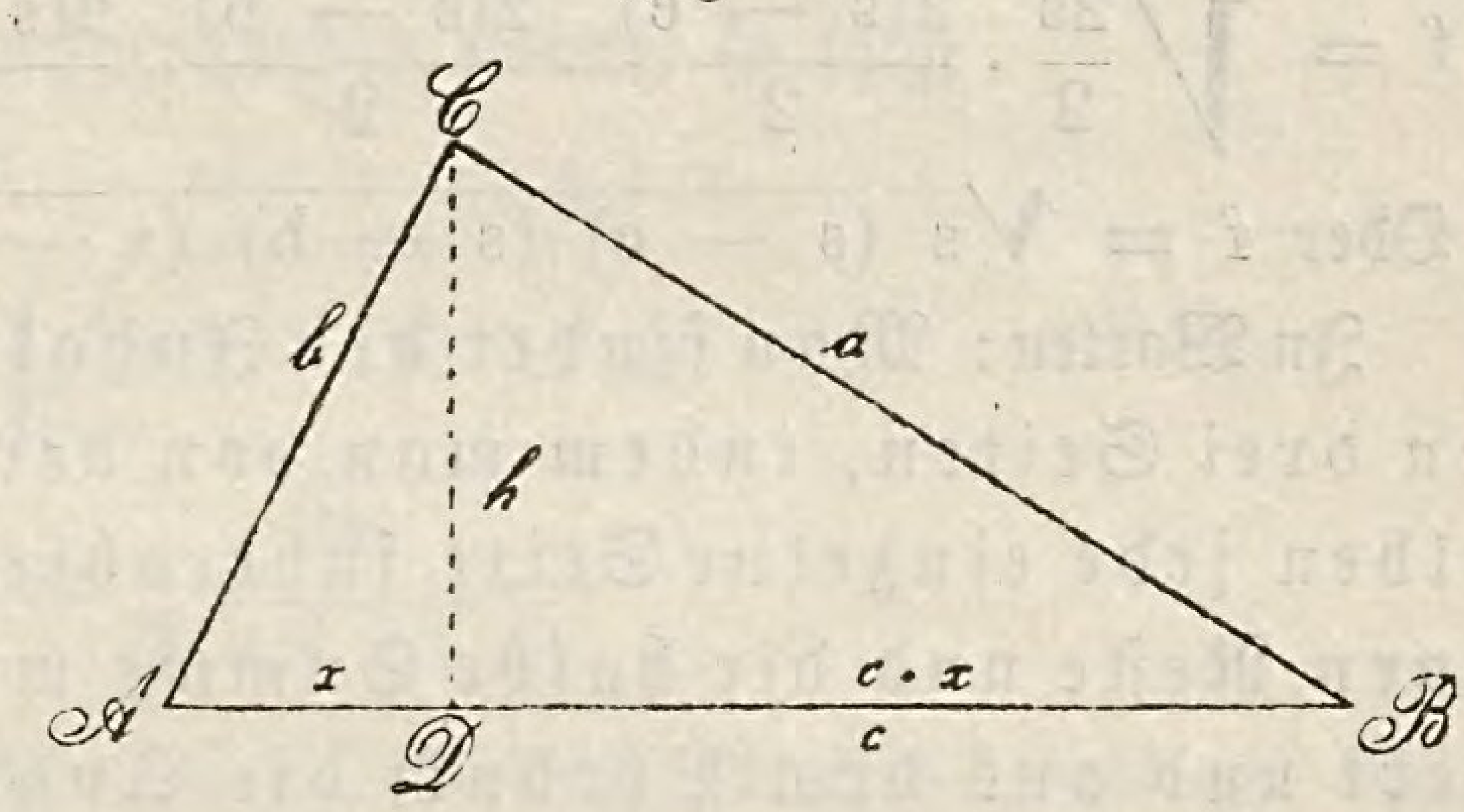
Entwicklung und Ableitung einiger Formeln.

a) Planimetrische Formeln.

1) Von einem Dreieck sind die 3 Seiten a, b und c gegeben; es soll ein allgemeiner Ausdruck für den Inhalt f desselben entwickelt werden!

Auflösung. Es kommt zunächst darauf an, das von einem Eck auf die Gegenseite gefällte Lot h, die Höhe des Dreieckes, zu finden. Da durch dasselbe das ungleichseitige Dreieck ABC, Fig. 25, in zwei rechtwinklige Dreiecke zerfällt, in denen h eine Kathete ist, so erhält man, wenn der an der Seite b liegende Abschnitt der Grundlinie c als x bezeichnet wird, weshalb der an der Seite a liegende dann c — x sein muß,

Fig. 25.



einerseits die Gleichung $h^2 = b^2 - x^2$ und andererseits $h^2 = a^2 - (c - x)^2$. Hieraus folgt $b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$, oder $b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$, oder $x = (b^2 + c^2 - a^2) : 2c$. Da man nun in der Gleichung $h^2 = b^2 - x^2$ statt $b^2 - x^2$ das Produkt $(b + x)(b - x)$ setzen kann *), so ergibt sich, wenn in diesen Ausdruck der soeben gefundene Wert für x substituiert wird, die folgende Gleichung:

---

*) Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen läßt sich in das Produkt aus der Summe und Differenz dieser Zahlen zerlegen.

$$h^2 = \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) \cdot \left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)$$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c}$$

$$= \frac{(b + c)^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - (b - c)^2}{2c}$$

$$= \frac{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}{4c^2} \text{ *)}$$

folglich $h = \frac{1}{2c}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(a + c - b)}$

und $f = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}$ **).

Drückt man nun den halben Umfang des Dreieckes, nämlich $\frac{1}{2}(a + b + c)$, durch s aus, setzt also $a + b + c = 2s$, so ist:

$$a + b + c = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2s$$
$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2s - 2c = 2(s - c)$$
$$a + c - b = a + b + c - 2b = 2s - 2b = 2(s - b)$$
$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2s - 2a = 2(s - a).$$

Dies in vorstehende Gleichung substituiert, kommt

$$f = \frac{1}{4}\sqrt{2s \cdot 2(s - c) \cdot 2(s - b) \cdot 2(s - a)}$$

$$f = \sqrt{\frac{2s}{2} \cdot \frac{2(s - c)}{2} \cdot \frac{2(s - b)}{2} \cdot \frac{2(s - a)}{2}} \text{ ***)}$$

Oder $f = \sqrt{s(s - c)(s - b)(s - a)}$

In Worten: Man findet den Inhalt eines Dreieckes aus den drei Seiten, indem man von der halben Summe derselben jede einzelne Seite subtrahiert, die drei so erhaltenen Reste und die halbe Summe miteinander multipliciert und aus dem Produkt die Quadratwurzel zieht †).

---

*) In diesem Ausdruck wurde die im vorigen Ausdruck stehende Differenz der Quadrate zweier Zahlen in das Produkt aus der Summe und Differenz dieser Zahlen verwandelt; es ist nämlich $(b + c)^2 - a^2 = ((b + c) + a) . ((b + c) - a)$ oder $(b + c + a)(b + c - a)$ und $a^2 - (b - c)^2 = (a + (b - c))(a - (b - c))$ oder $(a + b - c)(a - b + c)$.

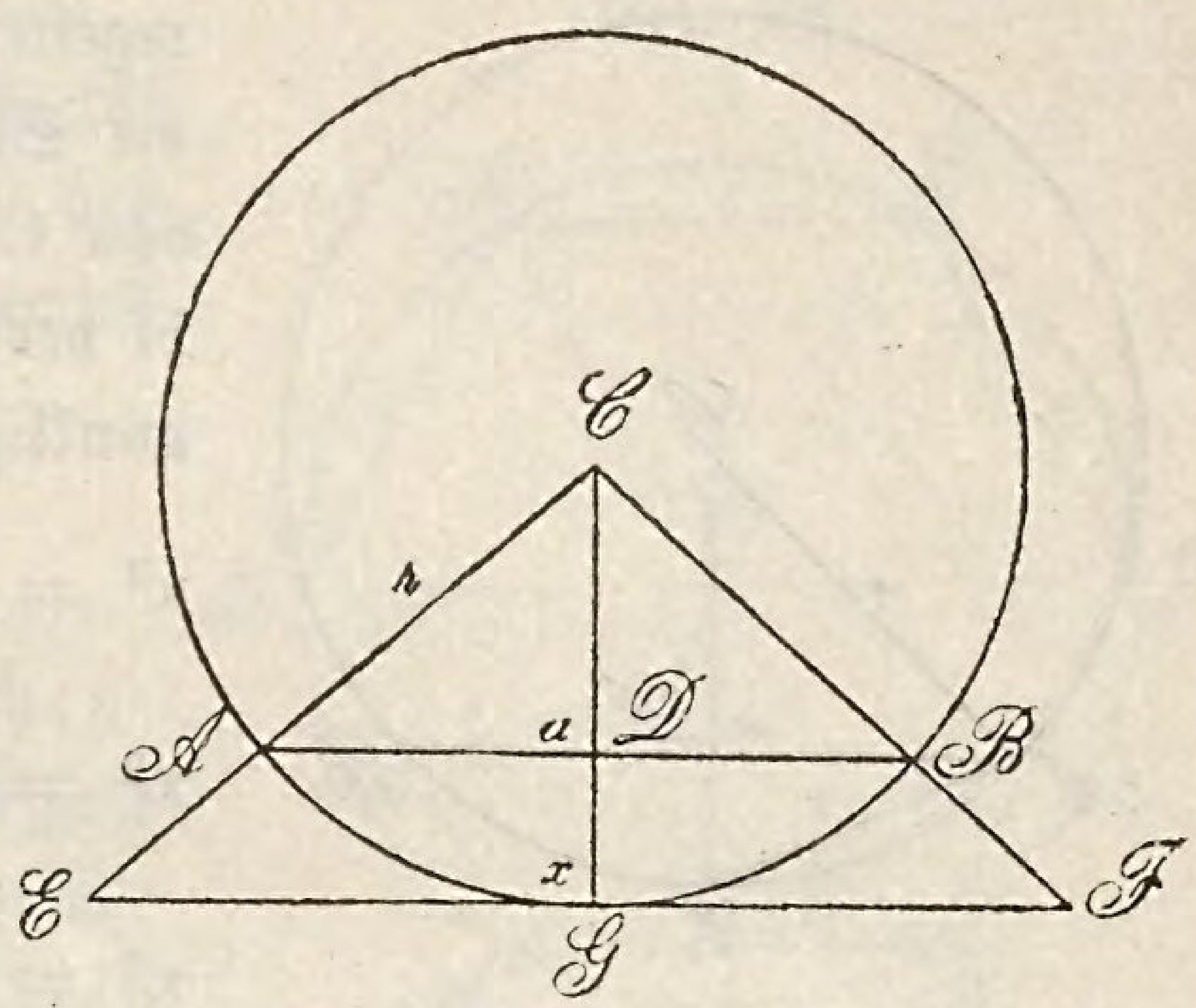
**) In diesem Ausdruck wurde die erhaltene Höhe mit der halben Grundlinie, nämlich mit $c : 2$, multipliciert.

***) Hier wurde der Nenner 4 unter das Wurzelzeichen gebracht und 16 in 2 . 2 . 2 . 2 zerlegt.

†) Die Formel für den Flächeninhalt eines Dreieckes aus seinen drei Seiten findet sich zuerst bei Hero dem Ältern, der um das J. 150 v. Chr. zu

2) Aus dem Radius AC = r eines Kreises und der Seite AB = a eines ihm eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes soll die Seite EF = x eines demselben Kreise umgeschriebenen regelmäßigen Polygons von gleicher Seitenzahl bestimmt werden.

Fig. 26.



Auflösung. Es ist Dreieck ABC ~ Dreieck CEF (zur Grundlinie EF eine Parallele AB gezogen) und deshalb:

CD : CG = AB : EF (in ähnl. Dr. verhalten sich die Höhen wie die homologen Grdl.)

Nun ist in dem rechtw. Dreieck ACD nach dem P. L.

$$CD = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$CD = \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

Substituiert man diesen Wert in obige Proportion und setzt statt der übrigen Größen die entsprechenden Werte, so folgt:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2} : r = a : x$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{4r^2 - a^2} = ar$$

$$x = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

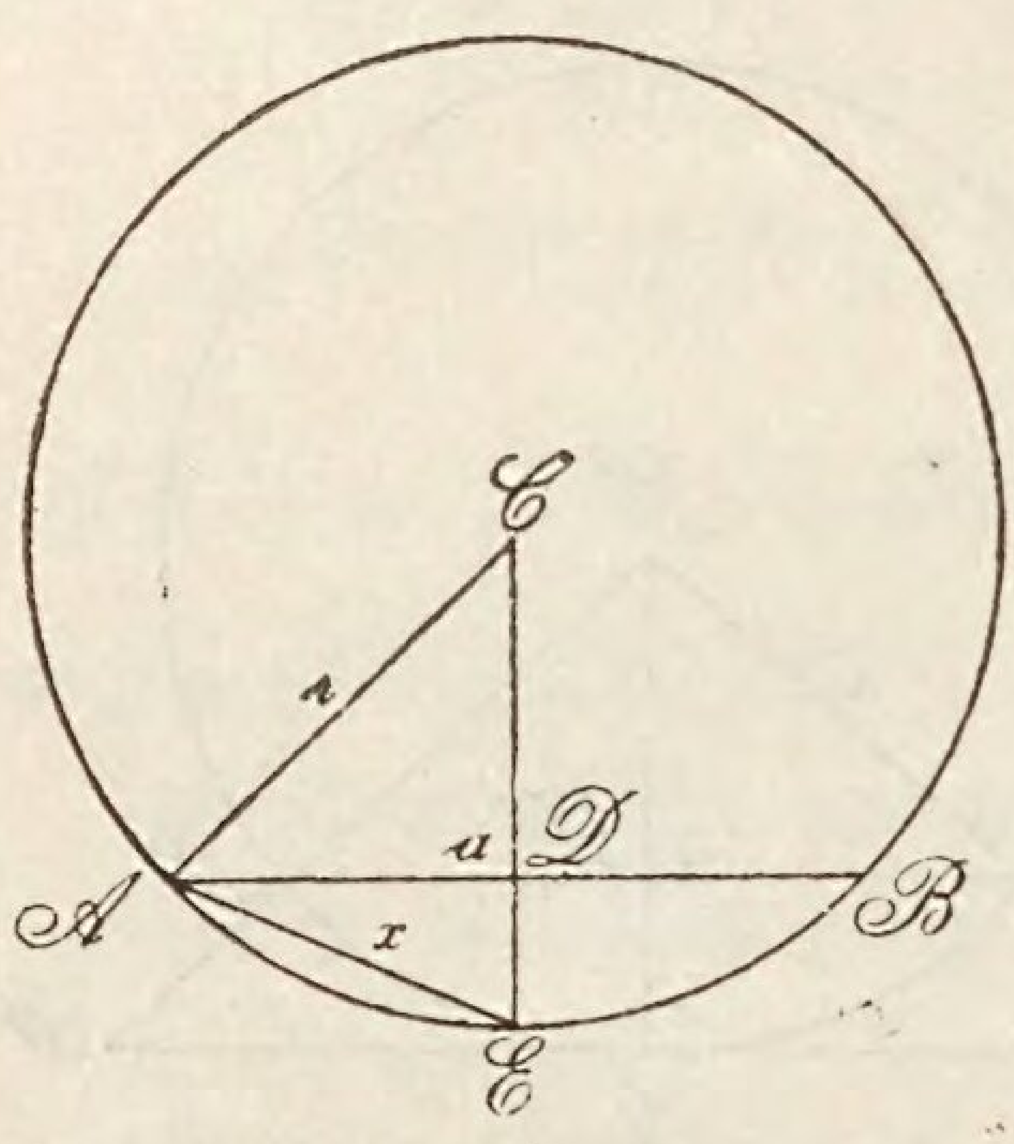
3) Aus dem Radius AC = r eines Kreises und der Seite AB = a eines ihm eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes soll die

---

Alexandrien lebte (von ihm der Heronsball, der Heronsbrunnen, die Äolipile, Dampfkreisel). Bei ihm findet sich auch ein (rein geometrischer) Beweis derselben. Von den Alexandrinern dürfte diese Formel den römischen Agrimensoren (Feldmessern) bekannt geworden sein, in deren Schriften sie sich ohne Beweis findet. Auch den Indern ist diese Formel bekannt gewesen, da sie sich in der Geometrie des indischen Mathematikers Brahmegupta (600 n. Chr.) findet. Ebenso haben die Araber dieselbe gekannt. Sie findet sich nämlich in dem Werke über Geometrie von den drei Söhnen des Musa ben Schaker Mohamed, Hamed und Alhazan (daher „Formel der drei Brüder", 870 n. Chr.). Von den Arabern kam die Formel nach Europa, zuerst durch Leonardo von Pisa.

Seite AE = x eines demselben Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Polygons von doppelter Seitenzahl bestimmt werden.

Fig. 27.



Auflösung. Ist AB = a die Seite eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Polygons, so erhält man die Seite AE des 2n-Eckes, wenn man von C aus das Lot CD fällt und bis E verlängert. Nun ist in dem rechtwinkligen Dreieck ADE

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (DE)^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{4} + (r - CD)^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 - 2r \cdot CD + (CD)^2 \,..\, 1.$$

In dem rechtwinkligen Dreieck ACD ist nun:

$$CD = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$CD = \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2.$$

Durch Substitution von 2 in 1 kommt:

$$x^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 - 2r \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2} + (\tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2})^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2} + r^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}$$

$$x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

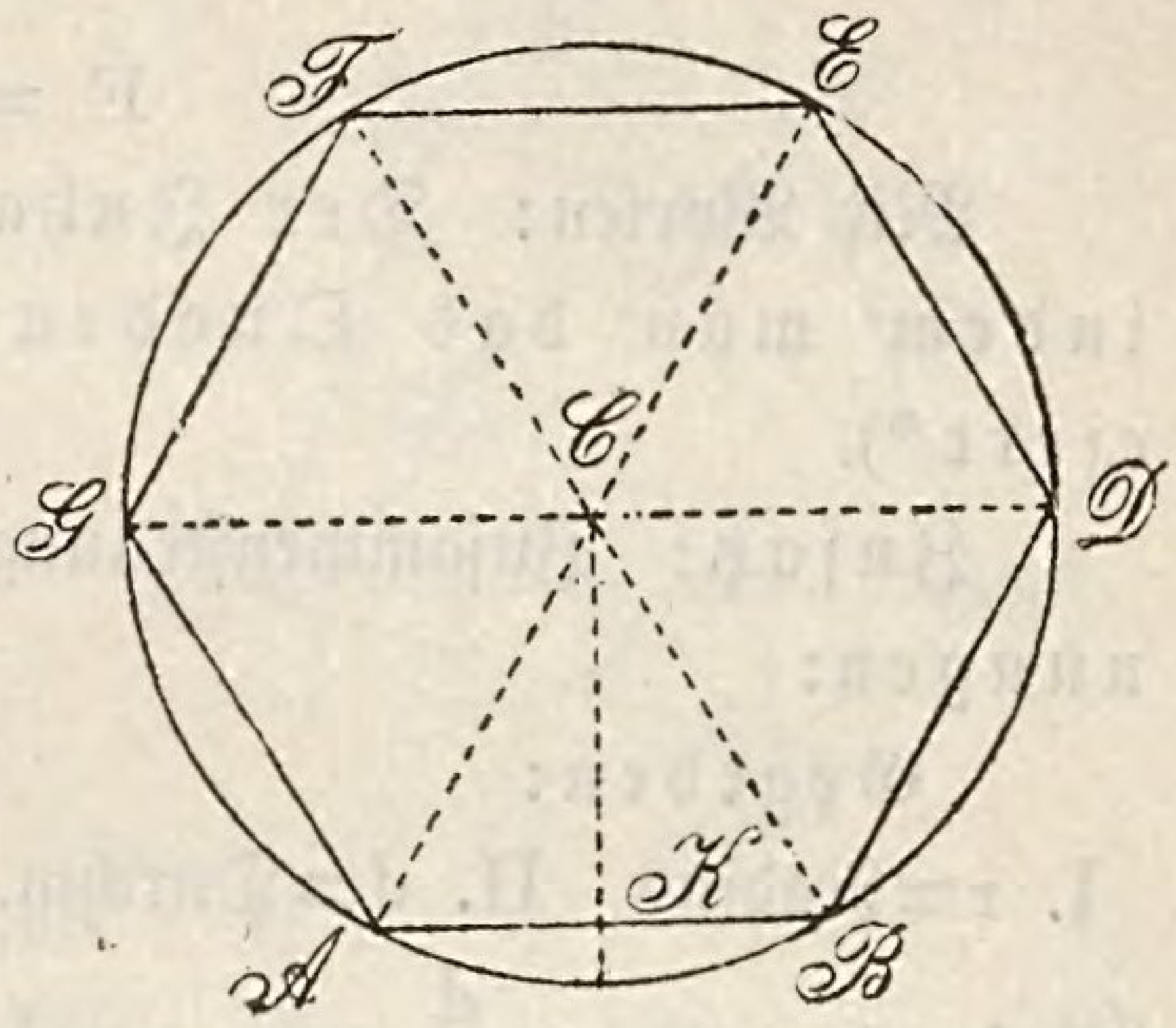
4) Es soll ein allgemeiner Ausdruck über den Inhalt eines regelmäßigen Vieleckes gesucht werden.

Auflösung. In den Kreis, Fig. 28, sei ein regelmäßiges Vieleck ABD . . . . eingeschrieben. Zieht man vom Mittelpunkt C nach den Eckpunkten Radien, so zerfällt das Polygon in so viele gleichschenklige Dreiecke als das regelmäßige Vieleck Seiten hat. Die Höhen dieser Dreiecke, d. h. die vom Mittelpunkt auf die Grundlinien gefällten Perpendikel, sind alle gleich (sie sind der Radius des dem regelmäßigen Vieleck eingeschriebenen Kreises). Der Inhalt F des Polygons ist nun:

$$F = AB \cdot \frac{CK}{2} + BD \cdot \frac{CK}{2} + DE \cdot \frac{CK}{2} \; . \; . \; .$$

$$F = (AB + BD + DE \; . \; . \; . \; .) \cdot \frac{CK}{2}$$

Fig. 28.



Bezeichnet man nun AB+BD... d. h. den Umfang des Polygons mit p und CK, d. h. den Radius des dem Vieleck eingeschriebenen Kreises mit r, so folgt:

$$F = p \cdot \frac{r}{2}.$$

Mit Worten: Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Polygons ist so groß als die Fläche eines Dreieckes, dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Polygons und dessen Höhe gleich dem Radius des eingeschriebenen Kreises ist.

5) Man soll die Formel über den Inhalt eines Kreises ableiten.

Herleitung. Der unter 4) entwickelte Satz gilt für alle regelmäßigen Polygone, wie viele Seiten sie auch haben mögen. Denken wir uns nun ein regelmäßiges Sechseck in den Kreis eingeschrieben. Sein Inhalt ist $\frac{1}{2}p \cdot r$. Vergleicht man diese Fläche mit dem Inhalt des Kreises, so ergibt sich, daß sie kleiner ist als dieser; auch ist der Umfang des Sechseckes kleiner als die Peripherie des Kreises, und der Radius des dem Polygon eingeschriebenen Kreises kleiner als der Kreisradius. Denken wir nun das regelmäßige Zwölf-, Vierundzwanzigeck ꝛc. eingeschrieben, so nähern sich die Flächen dieser Vielecke immer mehr der Fläche des Kreises, ihre Umfänge immer mehr der Kreisperipherie und die Radien der eingeschriebenen Kreise immer mehr dem Radius des Kreises. Setzen wir nun in Gedanken die wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl des Polygons fort, so müssen wir schließlich bei einem Polygon anlangen, das mit dem Kreise vollständig zusammenfällt. Der Inhalt dieses Polygons, d. h. der Inhalt des Kreises muß nun auch $\frac{1}{2}p \cdot r$ sein; p ist aber jetzt die Peripherie und r der Radius des Kreises. Daher die Formel:

$$F = \frac{p \cdot r}{2}.$$

Mit Worten: Die Fläche des Kreises ist so groß als die Fläche eines Dreieckes, dessen Grundlinie gleich der Peripherie und dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises ist.

Da $p = 2r\pi = d\pi$ ist, so folgt

$$F = \frac{2r\pi \cdot r}{2}$$

$$F = r^2\pi.$$

Mit Worten: Der Inhalt des Kreises wird gefunden, indem man das Quadrat des Radius mit π multipliciert*).

Zusatz: Zusammenstellung der Gleichungen für Kreisrechnungen:

Gegeben:

Gesucht:	I. r=Radius	II. d=Durchm.	III. p=Peripherie	IV. F=Inhalt
	1) $d=2r$	1) $r=\frac{d}{2}$	1) $r=\frac{p}{2\pi}$	1) $r=\sqrt{\frac{F}{\pi}}$
	2) $p=2r\pi$	2) $p=d\pi$	2) $d=\frac{p}{\pi}$	2) $d=2\sqrt{\frac{F}{\pi}}$
	3) $F=r^2\pi$	3) $F=\left(\frac{d}{2}\right)^2\pi=\frac{d^2\pi}{4}$	3) $F=\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2\pi=\frac{p^2}{4\pi}$	3) $p=2\sqrt{F\cdot\pi}$.

b) Stereometrische Formeln.

6) Es soll die mathematische Beziehung zwischen einem parallelen Schnitt an einer Pyramide und der Grundfläche untersucht werden.

Auflösung. In Figur 29 sei EFGH || ABCD und JL ⊥ ABCD. Zunächst folgt, daß die Schnittfigur und die Grundfläche gleich viele Seiten haben, also homogen sind. Sodann ergibt sich, daß beide Figuren gegenseitig winkelgleich sind, d. h.

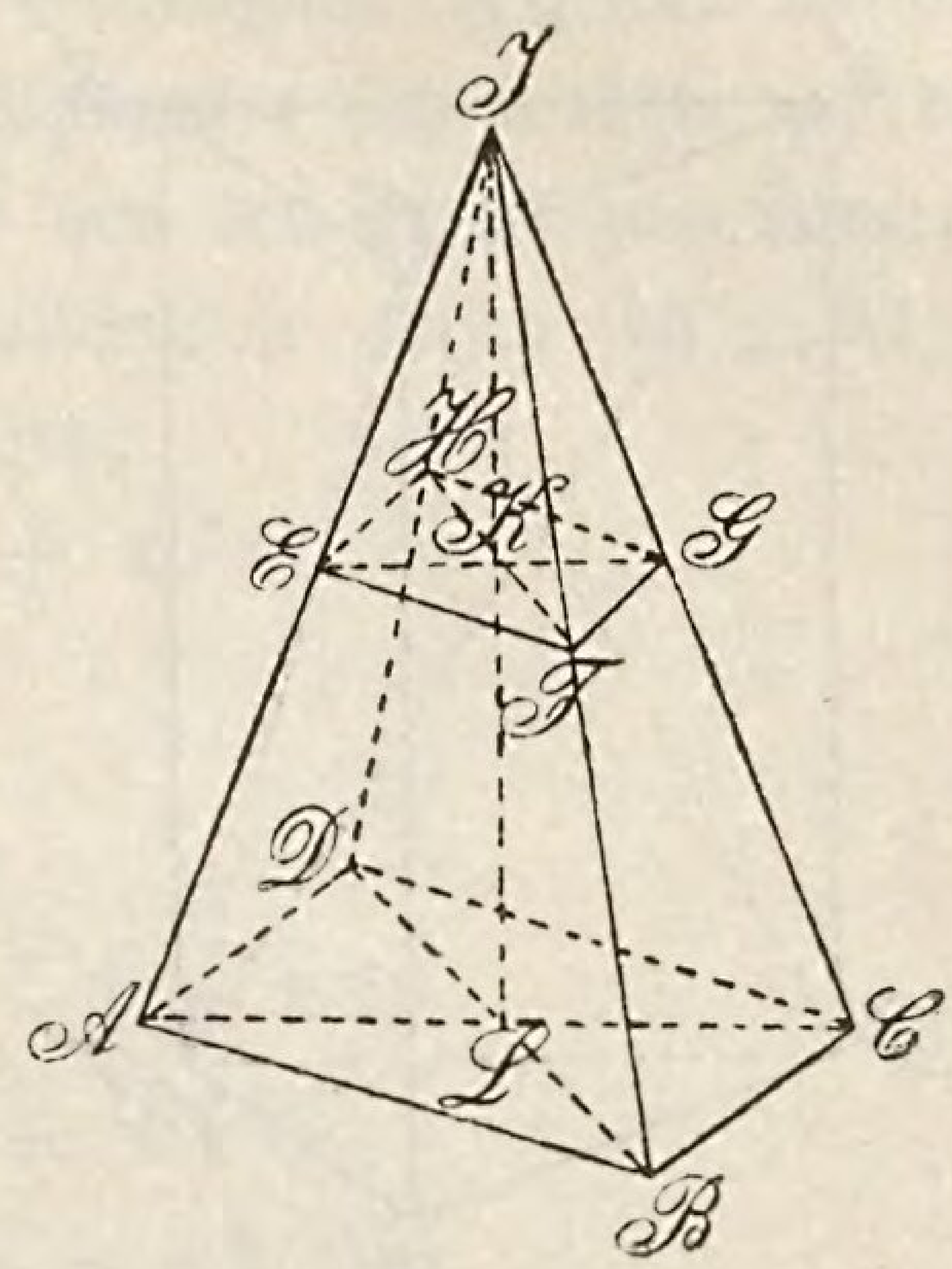
$\angle$ HEF = $\angle$ DAB,

$\angle$ EFG = ABC, u. s. w.; denn „Winkel, deren

*) Die Aufgabe, die Fläche des Kreises aus seinem Radius oder seiner Peripherie zu berechnen, heißt die Quadratur des Kreises. Wer sich für die Geschichte der Kreisquadratur interessiert, dem sei folgende sehr lehrreiche Monographie über diesen Gegenstand empfohlen: „Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Deutsch herausgegeben und mit einer Übersicht über die Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels, von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage, versehen" von **Dr. Rudio**; Leipzig, Teubner.

Schenkel parallel und gleichstimmig gerichtet sind, haben gleiche Größe.“ Weiter folgt, daß die homologen Seiten des Schnittes und der Grundfläche proportioniert sind; denn in dem Dreieck JAB verhält sich

Fig. 29.



EF : AB = JE : JA

(die Parallele zur Grundlinie ꝛc.)

und in dem Dreieck JAL verhält sich

JK : JL = JE : JA

(der eine obere Abschnitt zur ganzen Seite ꝛc.).

Aus beiden Proportionen folgt:

EF : AB = JK : JL . . . . . . 1)

Ebenso läßt sich zeigen: FG : BC = JK : JL . . . . . . 2)

GH : CD = JK : JL . . . . . . 3)

HE : DA = JK : JL . . . . . . 4)

Aus diesen 4 Proportionen ergibt sich:

EF : AB = FG : BC = GH : CD = HE : DA.

Da, wie soeben bewiesen wurde, der parallele Schnitt und die Grundfläche winkelgleich sind und proportionierte Seiten haben, so sind sie einander ähnlich.

Nun verhalten sich aber die Inhalte ähnlicher Polygone wie die Quadrate ihrer homologen Seiten; mithin

$$EFGH : ABCD = (EF)^2 : (AB)^2.$$

Nach Proportion 1) verhält sich aber:

EF : AB = JK : JL

also auch $(EF)^2 : (AB)^2 = (JK)^2 : (JL)^2$.

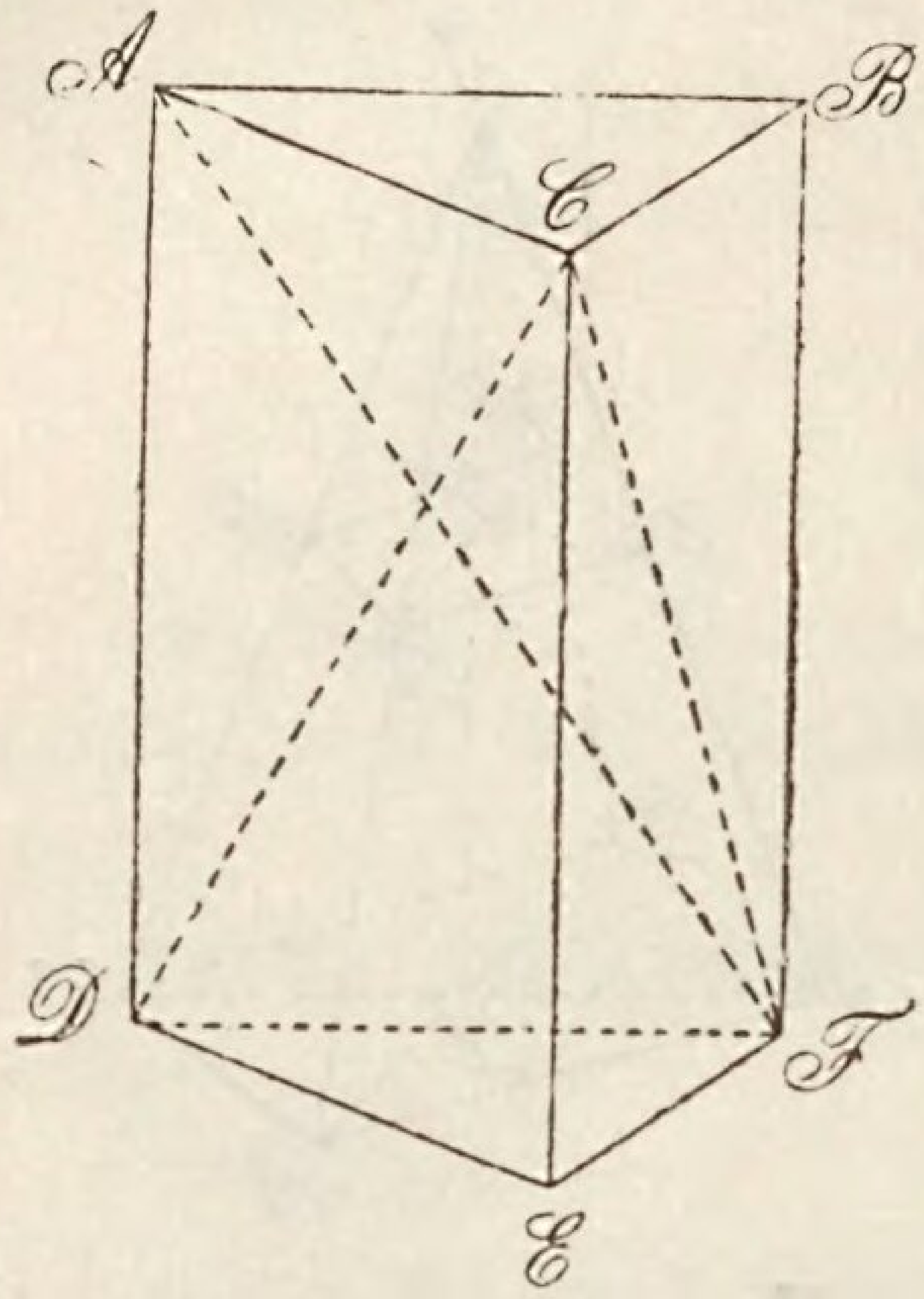
Daraus folgt:

$$EFGH : ABCD = (JK)^2 : (JL)^2.$$

Wir haben somit folgenden Satz gefunden: Wird eine Pyramide durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche der Grundfläche ähnlich und die Inhalte beider Flächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze der Pyramide.

7) Es soll die mathematische Beziehung zwischen einem dreiseitigen Prisma und einer dreiseitigen Pyramide von gleicher Grundfläche und Höhe untersucht werden.

Fig. 30.



Auflösung. Der Körper ABCDEF, Fig. 30, ist ein dreiseitiges Prisma. Legt man durch die Kante DF und den Punkt C eine Ebene, so entsteht eine dreiseitige Pyramide CDEF, welche mit dem Prisma gleiche Basis und gleiche Höhe hat. Denkt man sich diese Pyramide vom Prisma abgeschnitten, so bleibt noch die vierseitige Pyramide ABDFC mit der Basis ABDF und der Spitze C übrig. Durch eine Ebene, welche durch C und AF geht, wird diese nun in zwei dreiseitige Pyramiden von gleicher Basis und Höhe zerlegt. Folglich sind beide Pyramiden inhaltsgleich. Bei der Pyramide ABCF kann man aber auch ABC als Basis und F als Spitze ansehen. Folglich hat diese dann mit der zuerst abgeschnittenen gleiche Grundfläche und Höhe. Daher sind auch diese beiden einander gleich. Mithin sind alle 3 Pyramiden einander gleich. Somit haben wir den Satz gefunden: **Jedes dreiseitige Prisma kann in 3 gleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt werden. Folglich ist jede dreiseitige Pyramide gleich dem dritten Teil eines Prismas von gleicher Basis und Höhe.**

8) Aus den beiden parallelen Grundflächen G, g und der Höhe h einer abgestumpften Pyramide soll eine Formel zur Berechnung des Volumens V derselben entwickelt werden.

Auflösung. I. Denkt man sich den Pyramidenstumpf, Fig. 29, zu einer vollständigen Pyramide ergänzt, so ist das gesuchte Volumen des Stumpfes gleich der Differenz zwischen dem Volumen der ganzen Pyramide und dem Volumen der Ergänzungspyramide. Man erhält daher, wenn man die Höhe der gedachten Ergänzungspyramide mit x bezeichnet, weshalb dann die Höhe der ganzen Pyramide h + x ist, für das Volumen des Stumpfes die folgende Gleichung:

$$V = \tfrac{1}{3}(h + x)G - \tfrac{1}{3}xg$$

Oder: $$V = \tfrac{1}{3}hG + \tfrac{1}{3}xG - \tfrac{1}{3}xg$$

" $$V = \tfrac{1}{3}hG + \tfrac{1}{3}x\,(G - g) \quad . \; . \; . \; . \quad 1)$$

Aus dieser Gleichung muß die Höhe x der Ergänzungspyramide eliminiert werden, da sie nicht gegeben ist. Es kommt mithin jetzt darauf an, diese Größe durch die gegebenen Stücke des Stumpfes zu

bestimmen. Da nach einem stereometrischen Satze der Inhalt eines Durchschnitts einer Pyramide, welcher mit der Grundfläche derselben parallel ist, zum Inhalt der Grundfläche dieser Pyramide sich verhält wie das Quadrat der Entfernung des Durchschnitts von der Spitze zum Quadrat der Entfernung der Grundfläche von derselben, so lassen sich g, G, x und h + x in folgende Proportion bringen:

$$g : G = x^2 : (h + x)^2$$

Oder: $$\frac{g}{G} = \frac{x^2}{(h+x)^2}$$

Beiders. Quadrw. gezogen: $$\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}} = \frac{x}{h + x}\ ^{*)}$$

Die Nenner beseitigt: $$\sqrt{g}\,(h+x) = x\sqrt{G}$$

Die Kl. aufgelöst: $$h\sqrt{g} + x\sqrt{g} = x\sqrt{G}$$

Transponiert: $$x\sqrt{G} - x\sqrt{g} = h\sqrt{g}$$

x herausgetrennt: $$x(\sqrt{G} - \sqrt{g}) = h\sqrt{g}$$

Durch $\sqrt{G} - \sqrt{g}$ dividiert: $$x = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} \quad . \ . \ . \ 2)$$

Setzt man nun den für x gefundenen Wert 2) in Gleichung 1) ein, so geht diese Gleichung in die folgende über:

$$V = \tfrac{1}{3}hG + \frac{h\sqrt{g}}{3(\sqrt{G} - \sqrt{g})} \cdot (G - g)$$

Oder reduciert: $$V = \tfrac{1}{3}hG + \tfrac{1}{3}h\sqrt{g}\,(\sqrt{G} + \sqrt{g})\ ^{**)}$$

Kl. aufgelöst: $$V = \tfrac{1}{3}hG + \tfrac{1}{3}h\sqrt{Gg} + \tfrac{1}{3}hg$$

$\tfrac{1}{3}h$ ausgeschieden: $$V = \frac{h}{3}\,[G + g + \sqrt{Gg}].$$

---

*) Dadurch, daß man aus beiden Seiten die Quadratwurzel zieht, wodurch x nur noch in der ersten Potenz stehen bleibt, vermeidet man eine verwickelte unreine quadratische Gleichung, die bei der gewöhnlichen Auflösungsweise entstehen würde.

**) Um aus dem Nenner des zweiten Ausdrucks der rechten Seite der vorigen Gleichung die Quadratwurzeln $\sqrt{G} - \sqrt{g}$ zu entfernen, multipliciert man Zähler und Nenner dieses Bruches mit $\sqrt{G} + \sqrt{g}$. Hiedurch erhält man im Nenner $(\sqrt{G} - \sqrt{g})\,(\sqrt{G} + \sqrt{g})$ oder G — g. Der letztere Ausdruck nun kann gegen denselben Ausdruck im Zähler gekürzt werden. Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man den Faktor (G — g) im Zähler in $(\sqrt{G} - \sqrt{g})\,(\sqrt{G} + \sqrt{g})$ sich zerlegt denkt und dann kürzt.

Mit Worten: Man findet den Kubikinhalt einer abgestumpften Pyramide, wenn man aus dem Produkt der Inhalte der Grund- und Deckfläche die Quadratwurzel zieht, zu dieser Wurzel den Inhalt jeder Fläche addiert, und alsdann die erhaltene Summe mit dem dritten Teil der Höhe multipliciert.

II. Den genauen Inhalt des Pyramidenstumpfes findet man auch, wenn man aus der gegebenen Höhe die Höhe der Ergänzungspyramide, bezw. der ganzen Pyramide sucht, hierauf vom ganzen Volumen das der Ergänzungspyramide subtrahiert. Angenommen, G sei 5^2qm, g $= 4^2$qm und h $= 15$ m.

1) Die Höhe x der Ergänzungspyramide findet man nach der Gleichung 2)

$$x = \frac{h \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

$$x = \frac{15 \cdot 4}{5 - 4} = \mathbf{60\ m.}$$

Folglich ist das Volumen V des Stumpfes:

$$V = \frac{75}{3} \cdot 25 - \frac{60}{3} \cdot 16$$

$$V = 315 \text{ cbm.}$$

2) Da sich, wie in Aufgabe 6 und Fig. 29 gezeigt wurde, EF : AB = JK : HL verhält, so ergibt sich die Höhe x der Ergänzungspyramide auch aus der Proportion:

$$4 : 5 = x : (15 + x)$$

$$5x = 60 + 4x.$$

$$x = \mathbf{60\ m}, \text{ u. s. w.}$$

3) Die Höhe der ganzen Pyramide findet man auch durch folgende Schlüsse. Da die quadratische Pyramide unten 5 m und oben 4 m breit ist, so hat die Grundkante um 5 — 4 = 1 m abgenommen. Dieser Abnahme entspricht hier eine Höhe von 15 m. An der Spitze der ganzen Pyramide ist die Kante = 0. Daher: zu einer Abnahme von 1 m gehört eine Höhe von 15 m; welche Höhe entspricht mithin einer Abnahme von 5 — 5 = 0 m? Eine Höhe von 5 · 15 = **75 m**, u. s. w.

III. Annähernd findet man auch den Inhalt des Stumpfes wie folgt:

1) Man addiert die beiden Endflächen, dividiert die Summe durch

2 und multipliciert den Quotienten mit der Höhe, wobei man den Pyramidenstumpf in Gedanken in ein Prisma verwandelt, also:

$$V = \frac{G + g}{2} \cdot h$$

$$V = \frac{25 + 16}{2} \cdot 15$$

$$V = 307\tfrac{1}{2} \text{ cbm.}$$

2) Man addiert die Endkanten, dividiert die Summe durch 2, sucht aus dem Quotienten den Inhalt einer mittleren Grundfläche und multipliciert diesen mit der Höhe, also:

$$V = \left(\frac{K + k}{2}\right)^2 \cdot h$$

$$V = \left(\frac{5 + 4}{2}\right)^2 \cdot 15$$

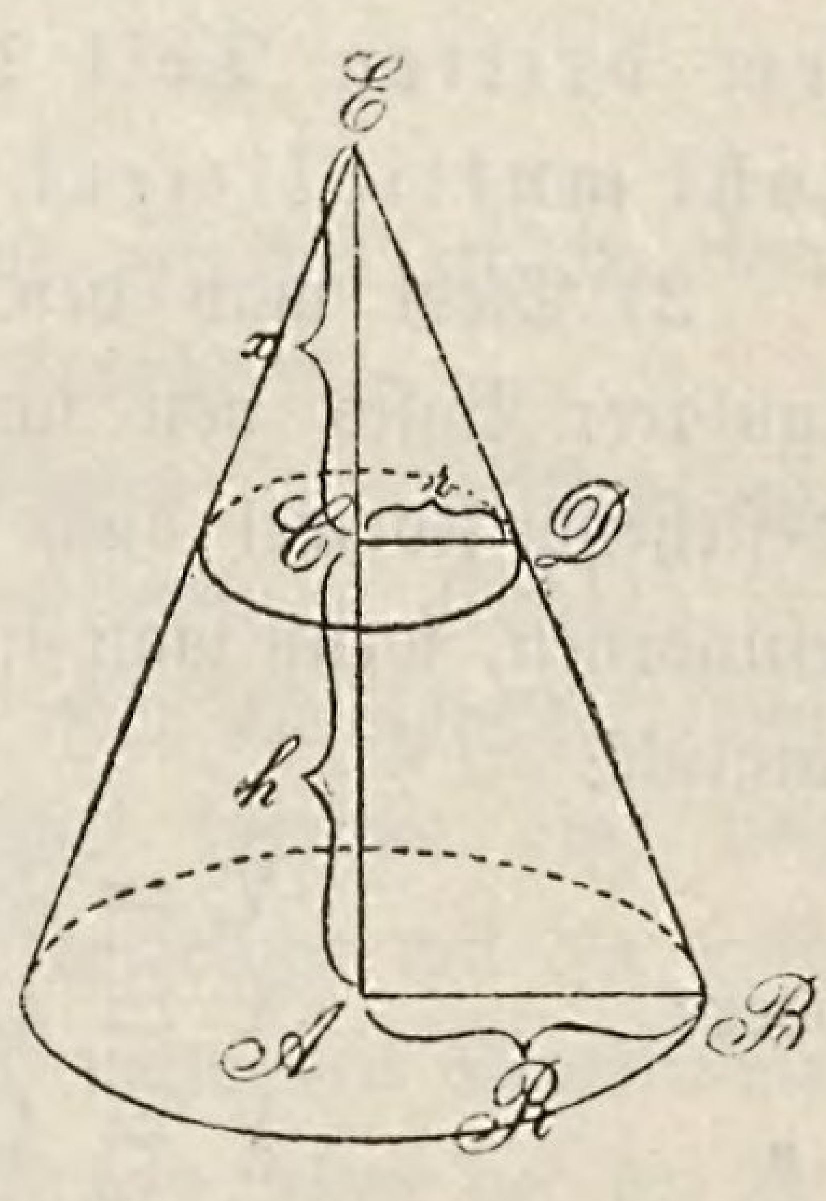
$$V = 303\tfrac{3}{4} \text{ cbm.}$$

3) Die Differenz zwischen dem zu großen und zu kleinen Resultat ist $307\frac{1}{2} - 303\frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$ cbm. Teilt man diese durch 3 und addiert zu dem zu kleinen Resultat $\frac{1}{3}$ und subtrahiert von dem zu großen $\frac{2}{3}$, so kommt ebenfalls das mathematisch genaue Resultat.

9) Von einem geraden Kegelstumpf sind die Radien den Grundflächen R und r, sowie die Höhe h desselben gegeben. Hieraus soll eine Formel zur Berechnung des Volumens V des Kegelstumpfes entwickelt werden.

Auflösung. I. 1) Denkt man sich, Fig. 31, den Kegelstumpf zu einem vollständigen Kegel ergänzt, so ist das gesuchte Volumen des Stumpfes gleich der Differenz zwischen dem Volumen des ganzen Kegels und dem des Ergänzungskegels. Bezeichnet man die Höhe des letzteren mit x, so erhält man daher, da dann die Höhe des ganzen Kegels h + x ist, für das Volumen des Stumpfes folgende Gleichung:

Fig. 31.



$$V = \tfrac{1}{3}(h + x) R^2\pi - \tfrac{1}{3}xr^2\pi$$

Oder: $$V = \tfrac{1}{3}hR^2\pi + \tfrac{1}{3}xR^2\pi - \tfrac{1}{3}xr^2\pi$$

„ $$V = \tfrac{1}{3}hR^2\pi + \tfrac{1}{3}x(R^2 - r^2)\pi \quad . . . . 1)$$

Aus dieser Gleichung muß nun x eliminiert werden. Es kommt jetzt mithin darauf an, die Größe x durch die gegebenen Stücke des Kegelstumpfes zu bestimmen. Dies ist mit Hilfe des Satzes möglich, daß sich die Quadrate der Abstände paralleler Schnittflächen des Kegels verhalten wie die Schnittflächen. Auf Grund dieses Satzes ist nämlich

$$x^2 : (h + x)^2 = r^2\pi : R^2\pi$$

$$\frac{x^2}{(h + x)^2} = \frac{r^2\pi}{R^2\pi}$$

$$\frac{x}{h + x} = \frac{r}{R}$$

$$xR - xr = hr$$

$$x = \frac{hr}{R - r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Setzt man nun den für die Höhe x des Ergänzungskegels gefundenen Wert 2) in Gleichung 1) ein, so erhält man:

$$V = \tfrac{1}{3}hR^2\pi + \tfrac{1}{3}\frac{hr}{R-r}(R^2-r^2)\pi$$

Oder: $V = \tfrac{1}{3}hR^2\pi + \tfrac{1}{3}hr\,(R+r)\pi$

" $V = \tfrac{1}{3}h\pi\,(R^2 + r^2 + Rr).$

Mit Worten: **Man findet den Kubikinhalt eines Kegelstumpfes aus den Radien der Grundflächen und der Höhe, wenn man die beiden Radien miteinander multipliciert, das Produkt zur Summe der Quadrate der beiden Radien addiert und die Summe dieser drei Produkte mit dem dritten Teil der Höhe und mit der Ludolph'schen Zahl multipliciert.**

2) Sieht man den Kegelstumpf als einen Pyramidenstumpf mit regulärer Basis von unendlich kleinen Seiten an, so erhält man die vorstehende Formel auch aus der für den Pyramidenstumpf auf S. 123 gefundenen, wenn man in dieser $R^2\pi$ für G und $r^2\pi$ für g substituiert; nämlich:

$$V = \tfrac{1}{3}h\,(R^2\pi + r^2\pi + \sqrt{R^2\pi \cdot r^2\pi})$$

Oder: $V = \tfrac{1}{3}h\,(R^2\pi + r^2\pi + Rr\pi)$

" $V = \tfrac{1}{3}h\pi\,(R^2 + r^2 + Rr).$

II. Man findet auch den Kubikinhalt eines Kegelstumpfes, indem man **den Inhalt des ganzen Kegels berechnet und darauf den Inhalt des Ergänzungskegels von jenem subtrahiert.**

Bei diesem Verfahren muß aber erst die Höhe des Ergänzungskegels durch Rechnung gesucht werden. Diese findet man auf verschiedene Weise:

1) Nach der Formel $x = \frac{hr}{R - r}$, d. h. man findet die Höhe des Ergänzungskegels aus den Radien R und r und der Höhe h des Kegelstumpfes, indem man den Radius der Deckfläche mit der Höhe multipliciert und dies Produkt durch die Differenz der beiden Radien dividiert. Ist also z. B. R = 8 m, r = 3 m, h = 24 m, so ist die Höhe des Ergänzungskegels $x = \frac{3 \cdot 24}{8 - 5} = 14\frac{2}{5}$ m.

2) Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt auch:

$$x : (h + x) = r : R$$
$$xR - xr = hr$$
$$x = \frac{hr}{R - r}$$

3) Die Höhe des Ergänzungskegels findet man auch durch folgende Schlüsse: Beträgt R = 8, r = 3 und h = 24 m, so hat R von 0 m Höhe bis 24 m um 8 — 3 = 5 m abgenommen. Um wieviel müßte der Kegel noch höher werden, damit R = O wird, das heißt R um 8 m abnimmt? Um 5 m nahm der Halbmesser bei 24 m Höhe ab, um 1 m nimmt er bei dem 5ten Teil der Höhe und um 8 m bei 8 mal so großer Höhe ab; also ist die ganze Höhe $\frac{1}{5} \cdot 24 \cdot 8 = 38\frac{2}{5}$ m, mithin die der Spitze $38\frac{2}{5} - 24 = 14\frac{2}{5}$ m.

III. Wenn nicht mathematische Genauigkeit gefordert wird, kann man abgestumpfte Kegel auch auf folgende Art berechnen:

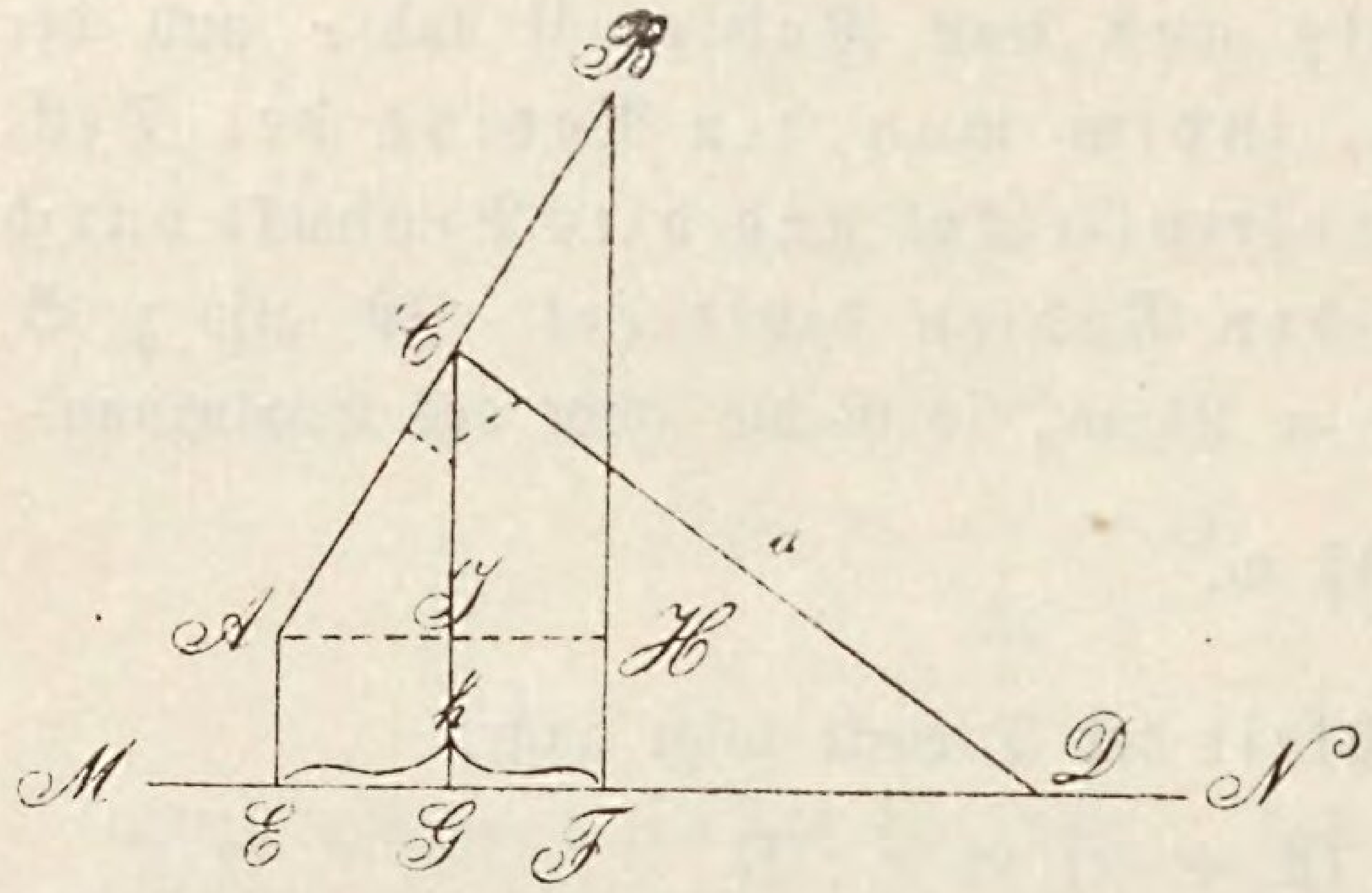
1) Man nimmt aus den beiden Grundflächen das arithmetische Mittel und multipliciert dies mit der Höhe (Ergebnis zu groß).

2) Man nimmt das Mittel aus den Halb- oder Durchmessern oder den Umfängen der beiden Grundflächen, berechnet hieraus eine neue Durchschnittsfläche und multipliciert den Inhalt derselben mit der Höhe (Ergebnis zu klein). Diese Berechnung, wobei man den Kegelstumpf als Cylinder betrachtet, wendet man im gewöhnlichen Leben bei der Berechnung von Baumstämmen an.

3) Aus diesen 2 Resultaten läßt sich auch wie beim Pyramidenstumpf das richtige Resultat finden.

10) Es soll ein allgemeiner Ausdruck für die Größe der Fläche F gefunden werden, welche eine Gerade AB beschreibt, wenn sie sich um eine Achse ganz herumdreht (Rotationsfläche).

Fig. 32.



Herleitung. Zunächst ergibt sich, daß die Linie AB, Fig. 32, bei ihrer Rotation um MN den Mantel eines abgestumpften Kegels beschreibt, der als parallele Radien AE und BF und als Seitenlinie AB hat (dies wird noch klarer, wenn man sich die Figur ABEF auch unter der Achse aufgetragen denkt). Es ist daher:

$$F = \frac{2AE + 2BF}{2} \pi \cdot AB$$

$$F = \frac{2(AE + BF)\pi}{2} \cdot AB$$

$$F = (AE + BF)\pi \cdot AB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Fällt man nun von C, der Mitte von AB, das Lot CG, so ist in dem Trapez ABEF

$$CG = \frac{AE + BF}{2}$$

$$2CG = AE + BF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Durch Substitution von 2) in 1) folgt:

$$F = 2CG \cdot \pi \cdot AB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Zieht man nun AH || MN und errichtet in der Mitte C von AB das Lot CD bis an die Achse MN, so erhält man die zwei ähnlichen Dreiecke ABH und CDG (sind winkelgleich). Die homologen Seiten in Proportion gesetzt folgt:

$$AB : CD = AH : CG.$$

Da nun AH = EF, so kommt:

$$AB : CD = EF : CG$$

$$AB \cdot CG = CD \cdot EF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Durch Substitution von 4) in 3) ergibt sich:

$$F = 2 \cdot CD \cdot \pi \cdot EF.$$

Bezeichnet man nun CD mit a und EF mit h, so folgt schließlich:

$$F = 2a\pi h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5).$$

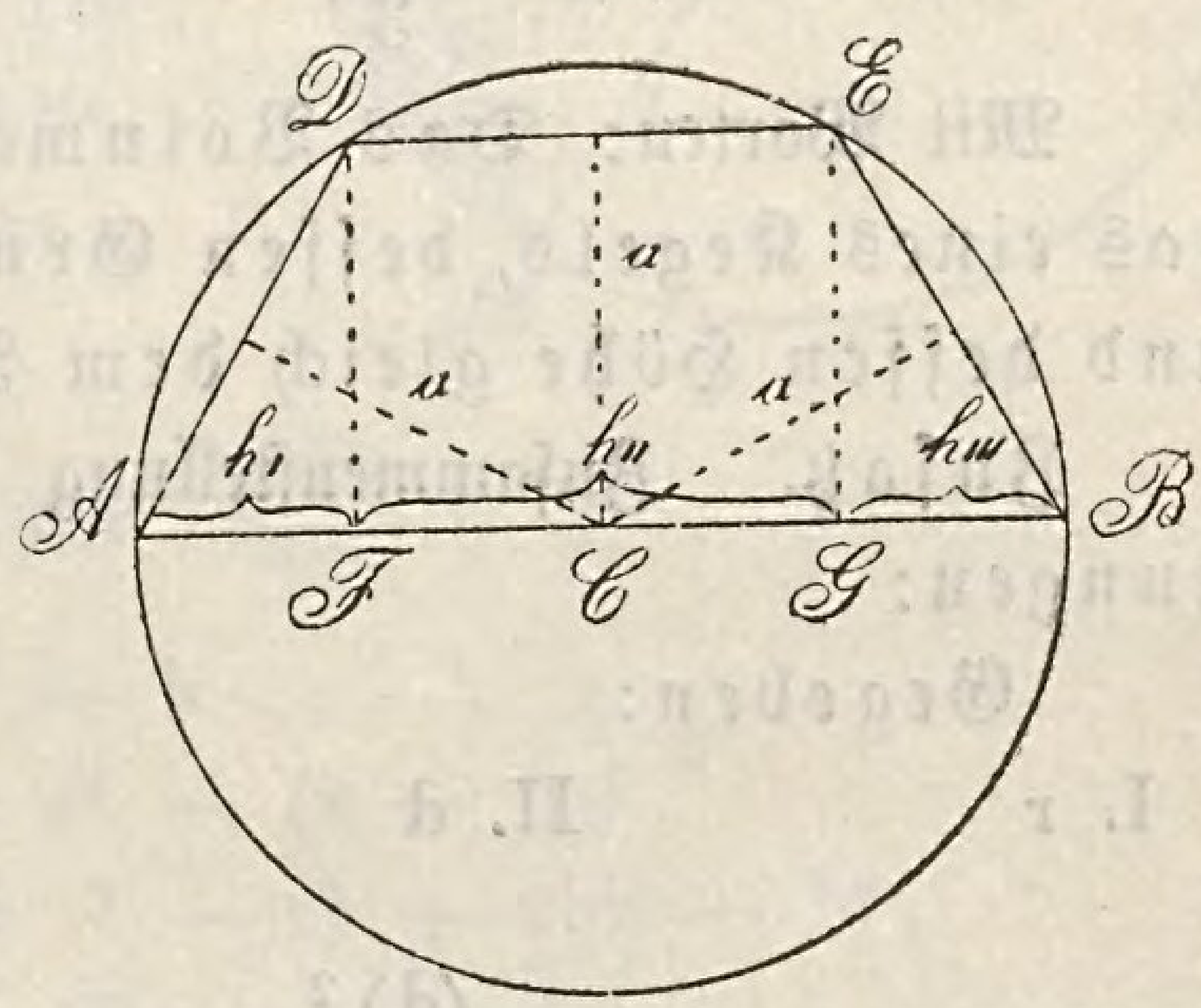
Diese Formel gilt offenbar auch, wenn sich der Endpunkt A immer mehr der Achse nähert und schließlich in dieselbe fällt. Daher der Satz:

Die Fläche F, welche eine Gerade AB beschreibt, wenn sich dieselbe um eine Achse MN ganz herumdreht, läßt sich nach folgender Formel $F = 2a\pi h$ berechnen, worin a der auf der Mitte der Linie AB errichtete, bis an die Achse MN gehende Perpendikel, π die bekannte Zahl 3,14 und h die Projektion von AB auf MN ist.

11) Man soll die Oberflächen- und Volumformel der Kugel ableiten.

Ableitung. 1) Die Oberfläche einer Kugel wird durch den Bogen eines Halbkreises beschrieben, wenn sich derselbe um seinen Durchmesser als Achse dreht. Denkt man sich nun zunächst, Fig. 33, in diesen Halbkreis ein regelmäßiges Vieleck beschrieben und nach Satz 10) die Fläche berechnet, welche von den Vielecksseiten beschrieben wird, so folgt:

Fig. 33.



$$F = 2a\pi h_{,} + 2a\pi h_{,,} + 2a\pi h_{,,,}$$
$$F = 2a\pi\,(h_{,} + h_{,,} + h_{,,,})$$
$$F = 2a\pi \cdot 2r.$$

Diese Fläche ist offenbar noch kleiner als die Fläche, welche der Bogen beschreibt, und a ist noch kleiner als r. Denkt man sich nun die Seitenzahl des regelmäßigen Vieleckes immerfort verdoppelt, so muß schließlich das Vieleck mit dem Halbkreis und a mit r zusammenfallen. Alsdann muß sein:

$$F = 2r\pi \cdot 2r = 4r^2\pi.$$

Also ist die Oberfläche O einer Kugel

$$O = 4r^2\pi.$$

Mit Worten: Die Oberfläche einer Kugel ist viermal so groß als die Fläche eines größten Kugelkreises.

2) Um die Volumformel der Kugel zu finden, denke man sich eine Kugel in unendlich viele kleine Kegel zerlegt, deren Spitzen um den Mittelpunkt der Kugel herumliegen und deren Grundflächen unendlich kleine Teile der Kugeloberfläche sind. Die Höhe eines jeden Kegels ist der Kugelradius, und die Summe ihrer Inhalte gleich dem Volumen der Kugel. Nennt man die unendlich kleinen Grundflächen der einzelnen Kegel a, b, c u. s. w., deren Summe O ist, so folgt:

$$V = a \cdot \frac{r}{3} + b \cdot \frac{r}{3} + c \cdot \frac{r}{3} + d \cdot \frac{r}{3} \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$V = (a + b + c + d \ldots) \cdot \frac{r}{3}$$

$$V = O \cdot \frac{r}{3}$$

$$V = 4r^2\pi \cdot \frac{r}{3}.$$

Mit Worten: **Das Volumen einer Kugel ist so groß als das eines Kegels, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.**

Zusatz. Zusammenstellung der Gleichungen für **Kugelrechnungen:**

Gegeben:

Gesucht:	I. r	II. d	III. p	IV. O	V. V
	1) $O=4\cdot r^2\pi$	1) $O=4\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2\pi$ $O = d^2\pi$	1) $O=4\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2\pi$ $O = \frac{p^2}{\pi}$	1) $r=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$	1) $r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$
	2) $V=4r^2\pi\cdot\frac{r}{3}$ $V=\frac{4r^3\pi}{3}.$	2) $V = d^2\pi\cdot\frac{d}{6}$ $V=\frac{d^3\pi}{6}.$	2) $V = \frac{p^2}{\pi}\cdot\frac{p}{6\pi}$ $V = \frac{p^3}{6\pi^2}.$	2) $d=\sqrt{\frac{O}{\pi}}$	2) $d=\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$
				3) $p=\sqrt{O\pi}$	3) $p=\sqrt[3]{6V\pi^2}$
				4) $V=\frac{O}{6}\sqrt{\frac{O}{6}}$	4) $O=\sqrt[3]{36V^2\pi}$

12) Es soll eine Formel zur Berechnung eines **Kugelsektors** abgeleitet werden.

Auflösung. Wie man sich das Innere einer ganzen Kugel in unendlich kleine Kegel zerlegt denken kann, so auch einen Kugelsektor.

Daraus ergibt sich dann: das Volumen eines Kugelsektors ist gleich dem eines Kegels, dessen Grundfläche die zugehörige Haube $2r\pi h$ und dessen Höhe der Kugelradius ist. Daher:

$$V = 2r\pi h \cdot \frac{r}{3}$$

$$V = \frac{2r^2\pi h}{3}.$$

13) Man soll eine Formel zur Berechnung eines Kugelsegments ableiten.

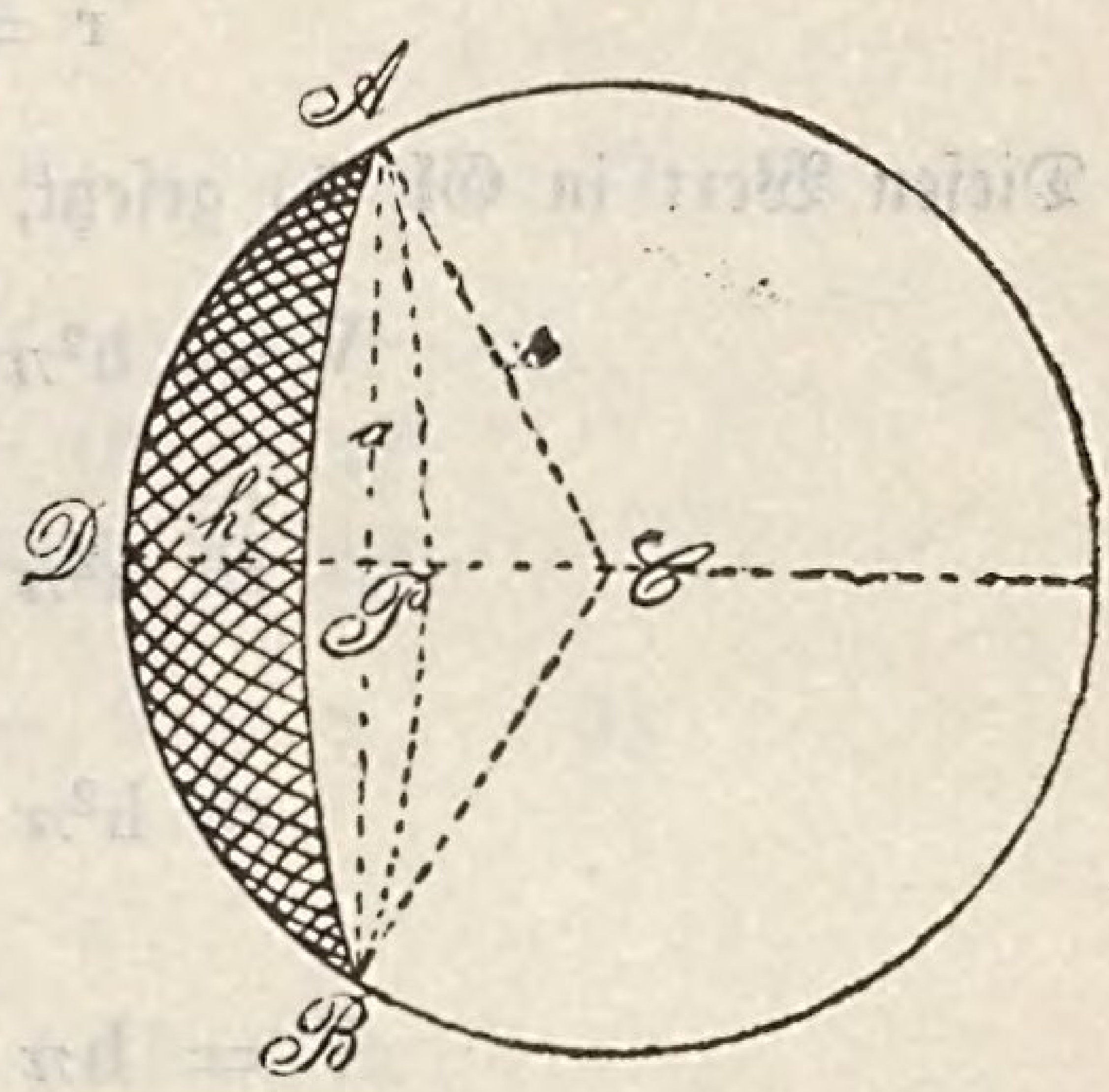


Fig. 34.

Auflösung. I. Es ist gegeben: die Höhe $DP = h$ des Segments und der Kugelradius r. Das Volumen des Segments findet man, wenn man vom Volumen des Sektors ABCD das des Kegels ABC subtrahiert, Fig. 34. Das Volumen v des letzteren ist:

$$v = (AP)^2\pi \cdot \frac{CP}{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Da nun aber $\quad CP = r - h \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$

und

$$(AP)^2 = r^2 - (r - h)^2$$

$$(AP)^2 = r^2 - r^2 + 2hr - h^2$$

$$(AP)^2 = 2hr - h^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

so folgt durch Substitution von 2) und 3) in 1):

$$v = \frac{r - h}{3} \cdot (2hr - h^2)\pi \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

Folglich ist das Volumen V des Segments:

$$V = \frac{2r^2\pi h}{3} - \frac{r - h}{3}(2hr - h^2)\pi$$

$$V = \frac{2r^2\pi h}{3} - \frac{2r^2h\pi}{3} + \frac{rh^2\pi}{3} + \frac{2rh^2\pi}{3} - \frac{h^3\pi}{3}$$

$$V = h^2r\pi - \frac{h^3\pi}{3}$$

$$\mathbf{V = h^2\pi(r - \tfrac{1}{3}h)} \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

oder auch

$$V = h^2\pi\,\frac{3r - h}{3}$$

"

$$V = \frac{h^2\pi}{3}(3r - h).$$

II. Es ist gegeben: die Höhe DP = h des Segments und der Radius AP = a seines Grundkreises. Nach dem Satze: „das von einem beliebigen Punkte A der Peripherie eines Halbkreises auf den Durchmesser gefällte Lot ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers“ folgt:

$$h : a = a : (2r - h)$$

$$2hr = a^2 + h^2$$

$$r = \frac{a^2 + h^2}{2h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6)$$

Diesen Wert in Gl. 5) gesetzt, kommt:

$$V = h^2\pi \left(\frac{a^2 + h^2}{2h} - \frac{h}{3}\right)$$

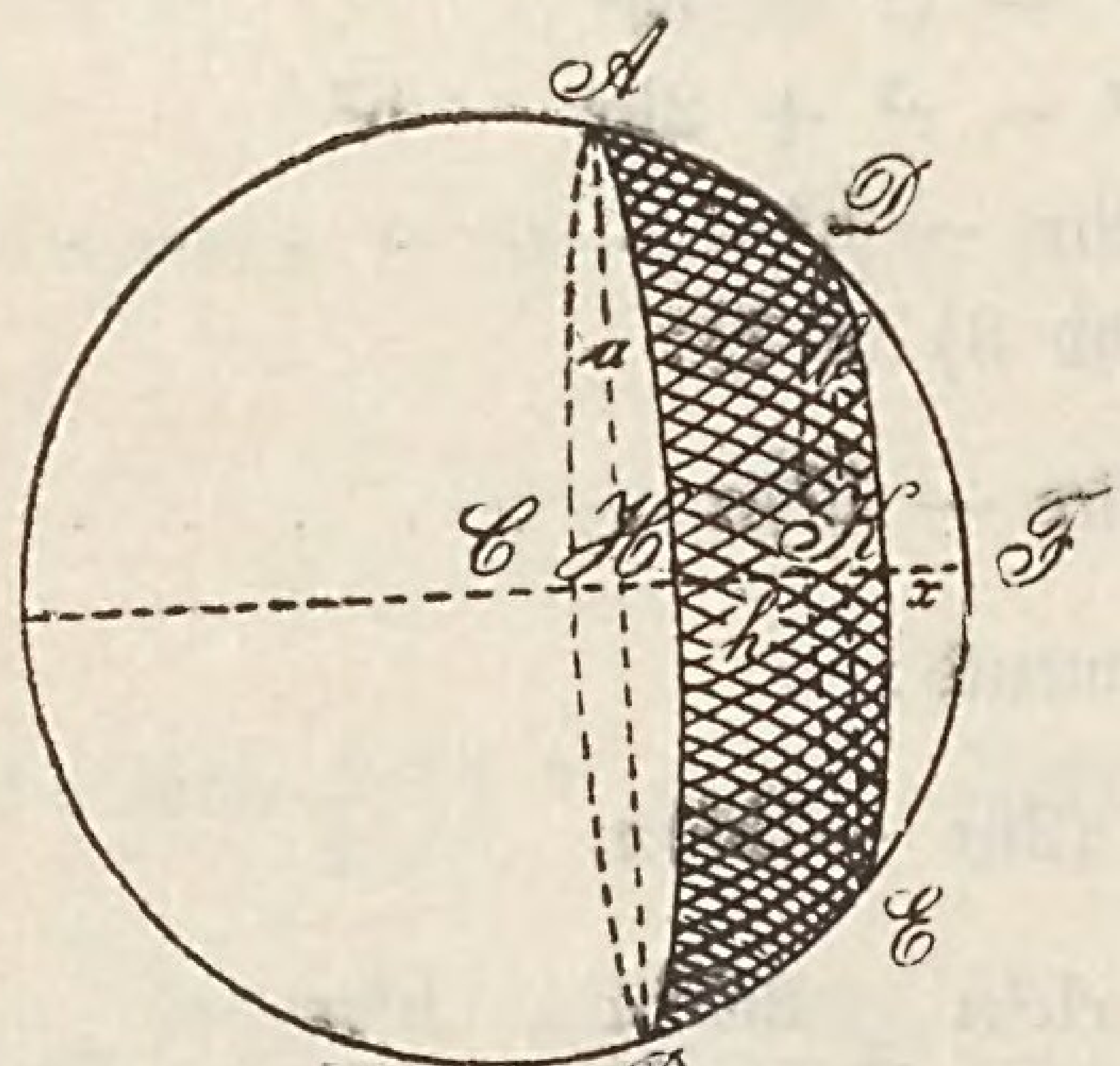
$$= h^2\pi \cdot \frac{3a^2 + 3h^2 - 2h^2}{6h}$$

$$= h^2\pi \cdot \frac{3a^2 + h^2}{6h}$$

$$V = h\pi \cdot \frac{3a^2 + h^2}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 7)$$

14) Man soll eine Formel zur Berechnung eines Zonenabschnittes finden.

Fig. 35.



Entwicklung. Es seien die beiden Radien der Grundflächen a und b und die Höhe HK = h des Zonenabschnitts gegeben, Fig. 35. Setzt man nun FK = x, so findet man das Volumen V der körperlichen Zone, wenn man vom Segment ABF das Segment DEF subtrahiert, also:

$$V = \frac{3a^2 + (h + x)^2}{6} \cdot (h + x)\pi - \frac{3b^2 + x^2}{6} \cdot x\pi$$

oder: $$V = \frac{3a^2 + h^2 + 2hx + x^2}{6}(h + x)\pi - \frac{3b^2 + x^2}{6} \cdot x\pi$$

„ $$V = \frac{\pi}{6}(3a^2h + h^3 + 2h^2x + hx^2 + 3a^2x + h^2x + 2hx^2 + x^3 - 3b^2x - x^3)$$

$$V = \frac{\pi}{6}(3a^2h + 3a^2x + h^3 + 3h^2x + 3hx^2 - 3b^2x)$$

$$V = \frac{\pi}{6}(3a^2h + h^3 + 3(hx^2 + a^2x + h^2x - b^2x) \quad . \quad 1)$$

Nach der in 13) angeführten Proportion folgt nun:

$$x : b = b : 2r - x$$

$$2rx - x^2 = b^2$$

$$2rx = b^2 + x^2$$

$$2r = \frac{b^2}{x} + x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

und

$$(h + x) : a = a : (2r - (h + x))$$

$$a^2 = 2hr + 2rx - (h + x)^2$$

$$2r(h + x) = a^2 + (h + x)^2$$

$$2r = \frac{a^2}{h + x} + h + x \quad . \quad . \quad 3)$$

Aus 2) und 3) folgt:

$$\frac{b^2}{x} + x = \frac{a^2}{h + x} + h + x$$

oder

$$\frac{b^2}{x} = \frac{a^2}{h + x} + h$$

"

$$b^2h + b^2x = a^2x + h^2x + hx^2$$

"

$$b^2h = h^2x + a^2x + hx^2 - b^2x \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Substituiert man den Wert 4) in 1), so folgt:

$$V = \frac{\pi}{6}(3a^2h + h^3 + 3 \cdot b^2h)$$

$$V = \frac{\pi h}{6}(3a^2 + 3b^2 + h^2)$$

oder:

$$V = \frac{\pi h}{2}\left(a^2 + b^2 + \frac{h^2}{3}\right).$$

Anhang IV.

Vollständige Auflösung einiger Rechenaufgaben.

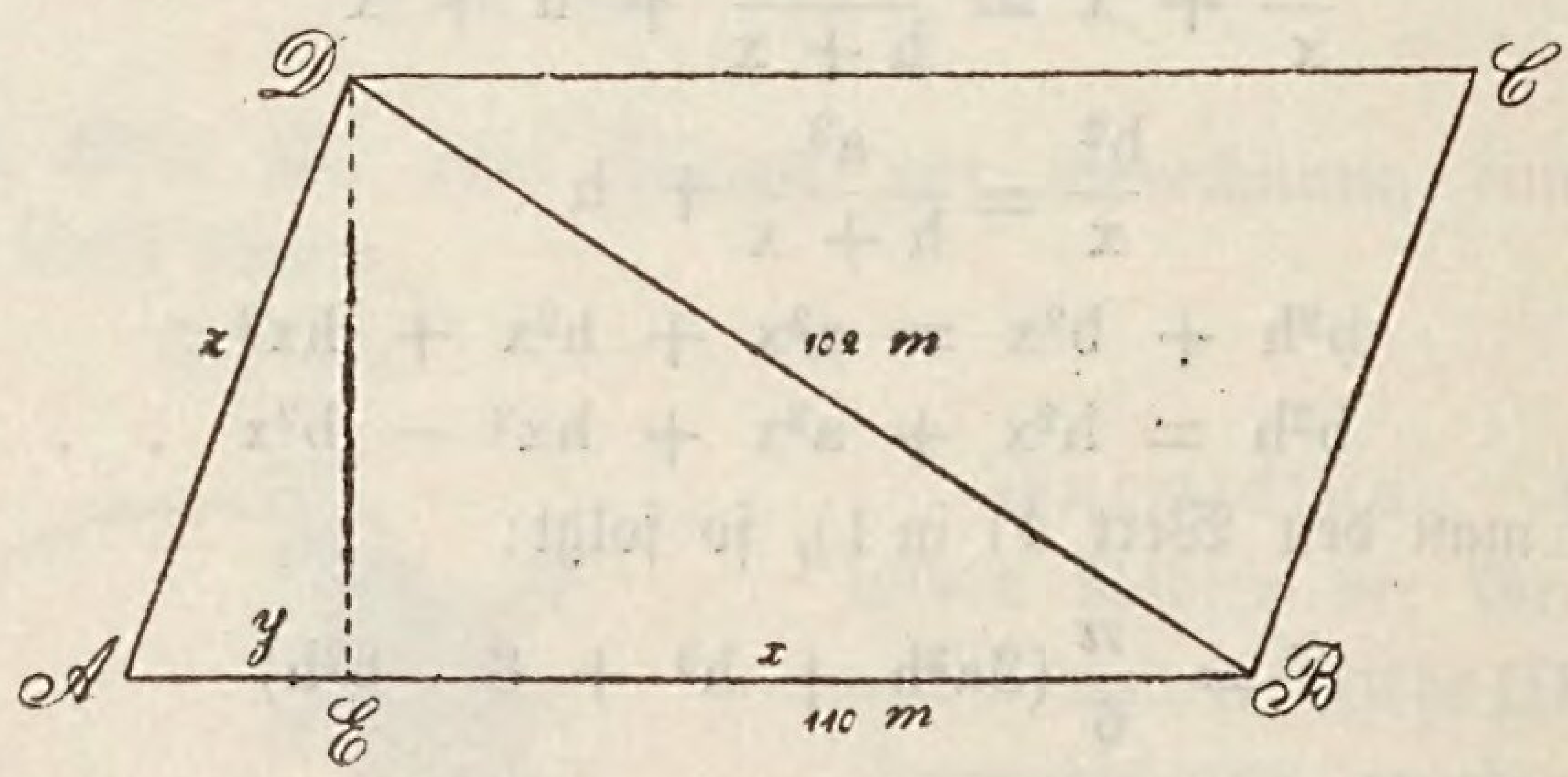
a) Planimetrische Aufgaben.

1) Ein Grundstück, das die Form eines Rhomboides besitzt, hat einen Inhalt von 49,5 a. Die kürzere Diagonale desselben mißt 102 m, und eine der größeren Seiten ist 110 m lang. Wie groß ist der Umfang des Grundstückes?

Auflösung. 1) Die Höhe DE = h, Fig. 36, des Grundstückes ist:

$$h = \frac{4950}{110} = 45 \text{ m.}$$

Fig. 36.



In dem rechtwinkligen Dreiecke BED kann nun BE = x berechnet werden. Es ist nämlich:

$$x^2 = 102^2 - 45^2$$
$$x^2 = 10404 - 2025$$
$$x^2 = 8379$$
$$x = 91{,}53 \text{ m.}$$

Folglich ist AE = y = 110 — 91,53 = 18,47 m.

In dem rechtwinkligen Dreiecke ADE kann man nun AD = z berechnen. Es ist nämlich:

$$z^2 = 45^2 + 18{,}5^2$$
$$z^2 = 2025 + 342{,}25$$
$$z^2 = 2367{,}25$$
$$z = 48{,}64.$$

Demnach ist der Umfang u des Grundstückes:

$$u = 2 \cdot 110 + 2 \cdot 48{,}64$$
$$u = 317{,}28 \text{ m.}$$

2) Bezeichnet man das Stück AE mit z, so ist BE = 110 — z, und man hat nun nach dem Pythag. Lehrsatz:

$$(110-z)^2 = 102^2 - 45^2$$
$$(110-z)^2 = 8379$$
$$110-z = 91{,}5$$
$$-z = -18{,}5$$
$$z = 18{,}5 \text{ m, u. s. w.}$$

3) $EB = \sqrt{102^2 - 45^2}$ und $AE = 110 - \sqrt{102^2 - 45^2}$. Bezeichnet man nun AD mit x, so erhält man die Gleichung:

$$x^2 = 45^2 + (110 - \sqrt{102^2 - 45^2})^2$$
$$x^2 = 45^2 + (110 - \sqrt{8379})^2$$
$$x^2 = 45^2 + (110 - 91{,}53)^2$$
$$x^2 = 45^2 + 18{,}47^2$$
$$x^2 = 2366{,}1409$$
$$x = 48{,}64 \text{ m, u. s. w.}$$

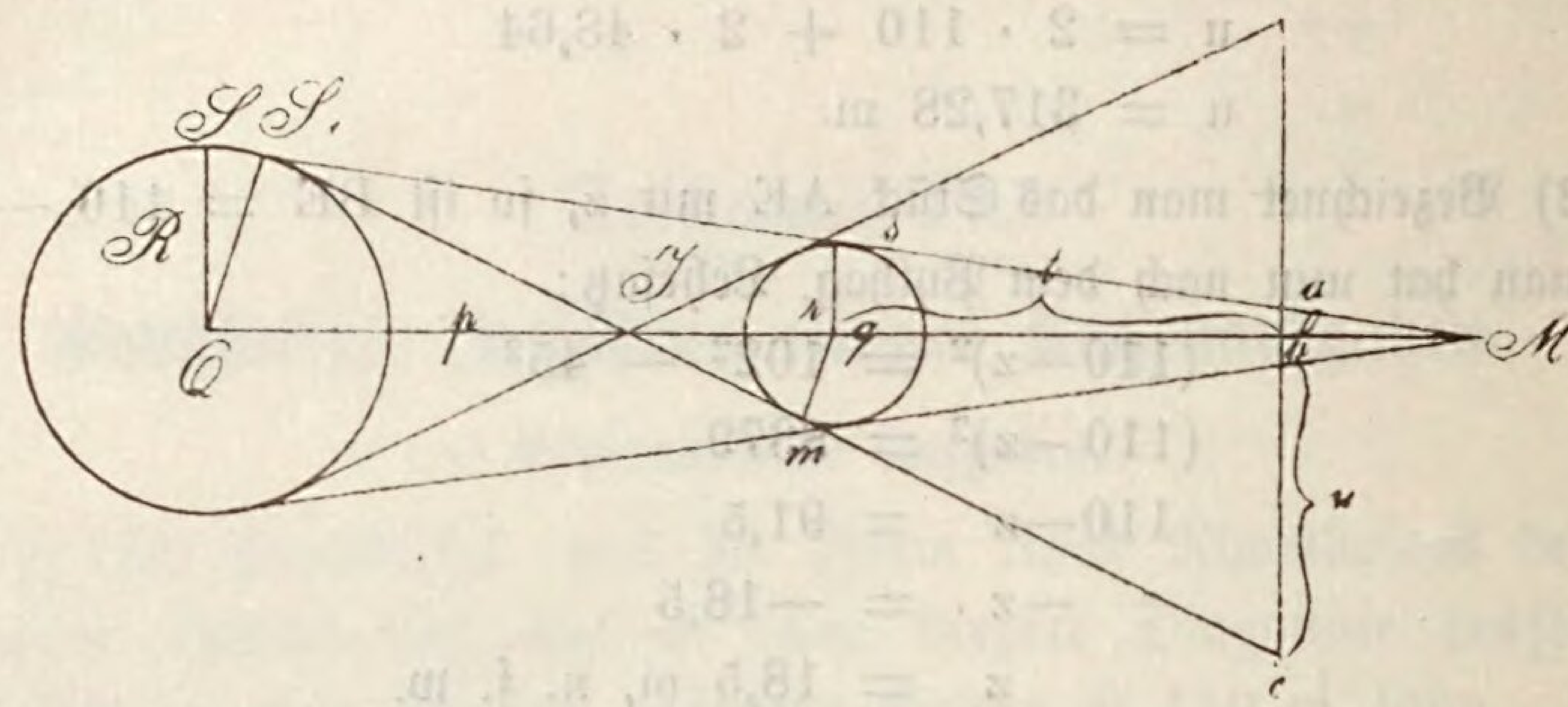
4) Durch die Diagonale BD zerfällt das Rhomboid in 2 inhaltsgleiche ungleichseitige Dreiecke, von denen jedes einen Inhalt von 2475 qm hat. Bezeichnet man nun die unbekannte Seite mit x, so erhält man nach der „Formel der 3 Brüder“:

$$\sqrt{\frac{212 + x}{2} \cdot \frac{212 - x}{2} \cdot \frac{x + 8}{2} \cdot \frac{x - 8}{2}} = 2475 \text{ u. s. w.}$$

2) Der Radius einer leuchtenden Kugel sei R, der einer kleineren, von der ersteren beleuchteten undurchsichtigen Kugel r und der Abstand der Mittelpunkte beider Kugeln p m. 1) Wie groß ist die Länge des Kernschattens hinter der dunklen Kugel, vom Mittelpunkte dieser Kugel an gerechnet? 2) In welcher Entfernung vom Mittelpunkte der dunklen Kugel liegt die Spitze des Halbschattens? 3) Wie groß ist der Halbmesser des Kernschattens in einem Abstande von t m vom Mittelpunkte des dunklen Körpers? 4) Wie groß ist der Halbmesser des Halbschattens daselbst?

Auflösung. Figur 37 veranschauliche die Entstehung des Kern- und Halbschattens. Die Ausdehnung wird durch die vier gezogenen Tangenten bestimmt. Aus der Figur läßt sich nun folgendes ableiten:

Fig. 37.



1) Dreieck MSQ $\sim$ Dreieck Msq, und daraus ergibt sich, wenn man die Entfernung der Spitze des Kernschattens vom Mittelpunkte der dunklen Kugel mit x bezeichnet, die folgende Proportion:

$$x : (p + x) = r : R, \text{ und daraus folgt:}$$

$$x = \frac{pr}{R - r}.$$

2) Dreieck Jmq $\sim$ Dreieck JQS_1 (1. Ähnlichkeitssatz, $\angle qmJ = \angle JS_1Q$); daraus ergibt sich, wenn man die Entfernung der Spitze des Halbschattens vom Mittelpunkte der dunklen Kugel mit y bezeichnet, die folgende Proportion:

$$y : (p - y) : r : R, \text{ woraus folgt:}$$

$$y = \frac{pr}{R + r}.$$

3) Dreieck abM $\sim$ Dreieck sqM ($\angle abM = \angle qsM = R$), und deshalb, den Halbmesser des Kernschattens in der Entfernung t vom Mittelpunkt der dunklen Kugel mit z bezeichnet, die folgende Proportion:

$$z : r = (x - t) : \sqrt{x^2 - r^2}, \text{ woraus folgt:}$$

$$z = \frac{r(x - t)}{\sqrt{x^2 - r^2}}$$

Nun ist aber nach 1)

$$x = \frac{pr}{R - r}$$

Durch Substitution erhält man nun:

$$z = \frac{r\left(\frac{pr}{R - r} - t\right)}{\sqrt{\left(\frac{pr}{R - r}\right)^2 - r^2}}$$

Aus diesem Ausdruck erhält man durch gehörige Reduktion:

$$z = \frac{pr - t(R - r)}{\sqrt{p^2 - (R - r)^2}}.$$

4) Dreieck Jbc ∼ Dreieck Jqm (∠ Jbc = ∠ Jmq) und deshalb, den Halbmesser des Halbschattens in der Entfernung t vom Mittelpunkte der dunklen Kugel mit u bezeichnet, die folgende Proportion:

$$u : r = (t + y) : \sqrt{y^2 - r^2}, \text{ woraus folgt:}$$

$$u = \frac{rt + ry}{\sqrt{y^2 - r^2}}$$

Durch Einsetzung des Wertes von y aus 2 und nach gehöriger Reduktion folgt endlich:

$$u = \frac{pr + t(R + r)}{\sqrt{p^2 - (R + r)^2}}.$$

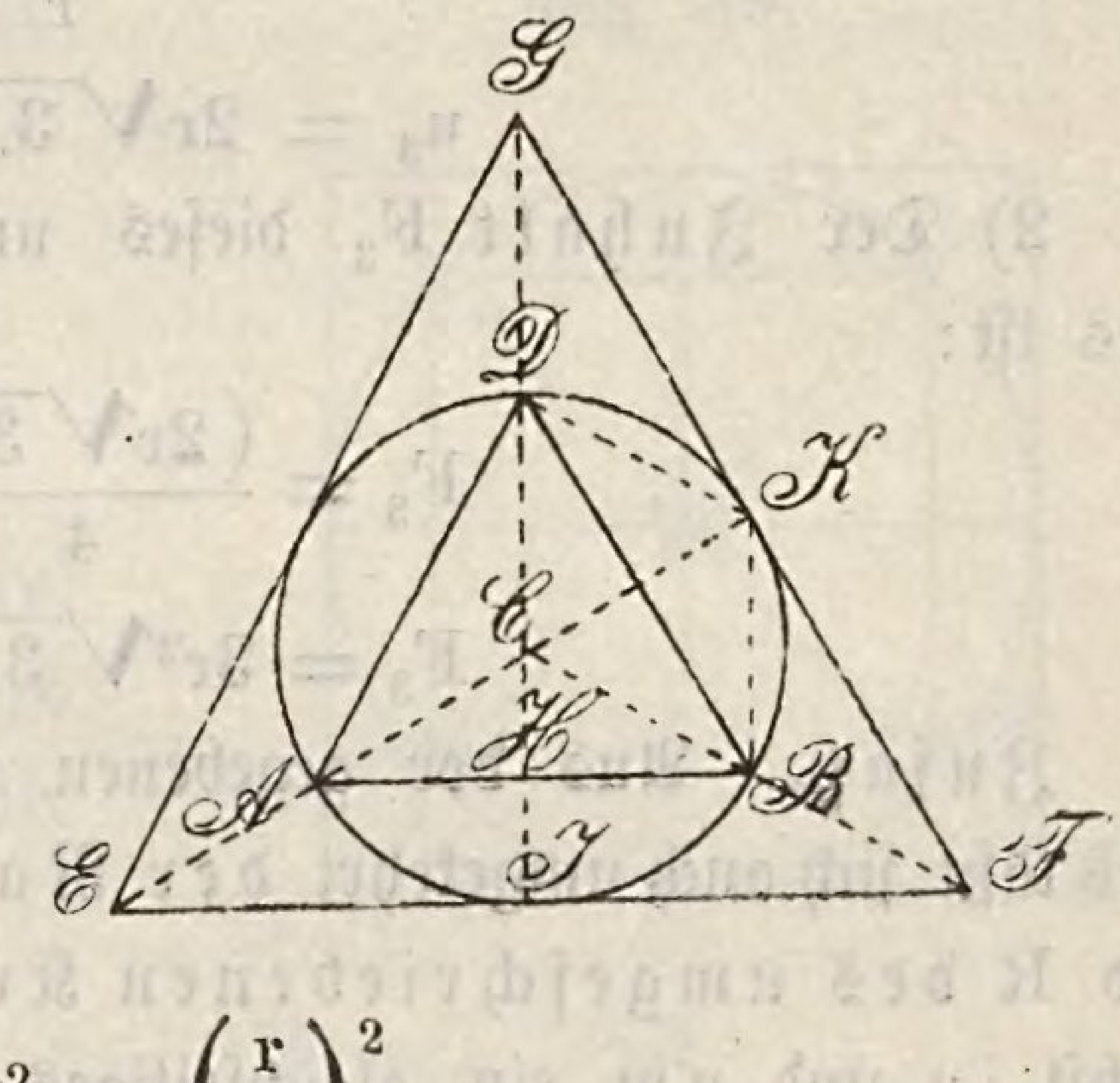
3) Aus dem Radius r = 6 cm eines Kreises soll die Seite und der Inhalt des ein- und umgeschriebenen regelmäßigen Drei-, Vier- und Sechseckes berechnet werden.

Auflösung.

I. Das regelmäßige Dreieck.

a) Das eingeschriebene.

Fig. 38.



Ist ABD das eingeschriebene regelmäßige Dreieck, so sind, Fig. 38, DK, BK Seiten des eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes und als solche gleich den Radien BC und CD.

1) Folglich ist das Viereck CBKD ein gleichseitiges Parallelogramm, und darum, die Dreiecksseite mit e_3 bezeichnet:

$$\left(\frac{e_3}{2}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$\frac{e_3^2}{4} = \frac{4r^2 - r^2}{4}$$

$$e_3^2 = 3r^2$$

$$e_3 = r\sqrt{3}.$$

2) Der Inhalt f_3 dieses Dreieckes ist nach der Formel $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$:

$$f_3 = \frac{(r\sqrt{3})^2}{4}\sqrt{3}$$

oder
$$f_3 = \frac{3}{4}\,r^2\sqrt{3}.$$

b) Das umgeschriebene. Dasselbe ist in Fig. 38 angedeutet.

1) Die Seite u_3 des umgeschriebenen regelmäßigen Dreieckes findet man:

I. Unmittelbar nach der Proportion in den beiden ähnlichen Dreiecken CAB und CEF

$$\frac{r}{2} : r = r\sqrt{3} : u_3$$

$$u_3 \cdot \frac{r}{2} = r^2\sqrt{3}$$

$$u_3 = 2r\sqrt{3}.$$

II. Nach der Formel Anhang III, 2. Setzt man in diese für a den Wert $r\sqrt{3}$, so folgt:

$$u_3 = \frac{2 \cdot r\sqrt{3} \cdot r}{\sqrt{4r^2 - (r\sqrt{3})^3}}$$

$$u_3 = \frac{2 \cdot r^2\sqrt{3}}{r}$$

$$u_3 = 2r\sqrt{3}.$$

2) Der Inhalt F_3 dieses umgeschriebenen regelmäßigen Dreieckes ist:

$$F_3 = \frac{(2r\sqrt{3})^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

$$F_3 = 3r^2\sqrt{3}.$$

Zusatz. Aus der gegebenen Seite a eines regelmäßigen Dreieckes läßt sich auch umgekehrt der Radius r des eingeschriebenen und R des umgeschriebenen Kreises finden. Man schreibe zunächst in und um ein gleichseitiges Dreieck einen Kreis. Nun findet sich leicht:

$$1)\ (2r)^2 - r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$3r^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$r^2 = \frac{a^2}{12}$$

$$r = \frac{a}{2 \cdot \sqrt{3}}$$

Oder: $$r = \frac{a}{6} \cdot \sqrt{3}.$$

Oder: Betrachtet man das gegebene gleichseitige Dreieck als ein dem kleinen Kreis umschriebenes, so folgt nach b) 1) dieser Aufgabe:

$$2r\sqrt{3} = a$$

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{a}{6}\sqrt{3}.$$

$$2)\ R = 2 \cdot \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}.$$

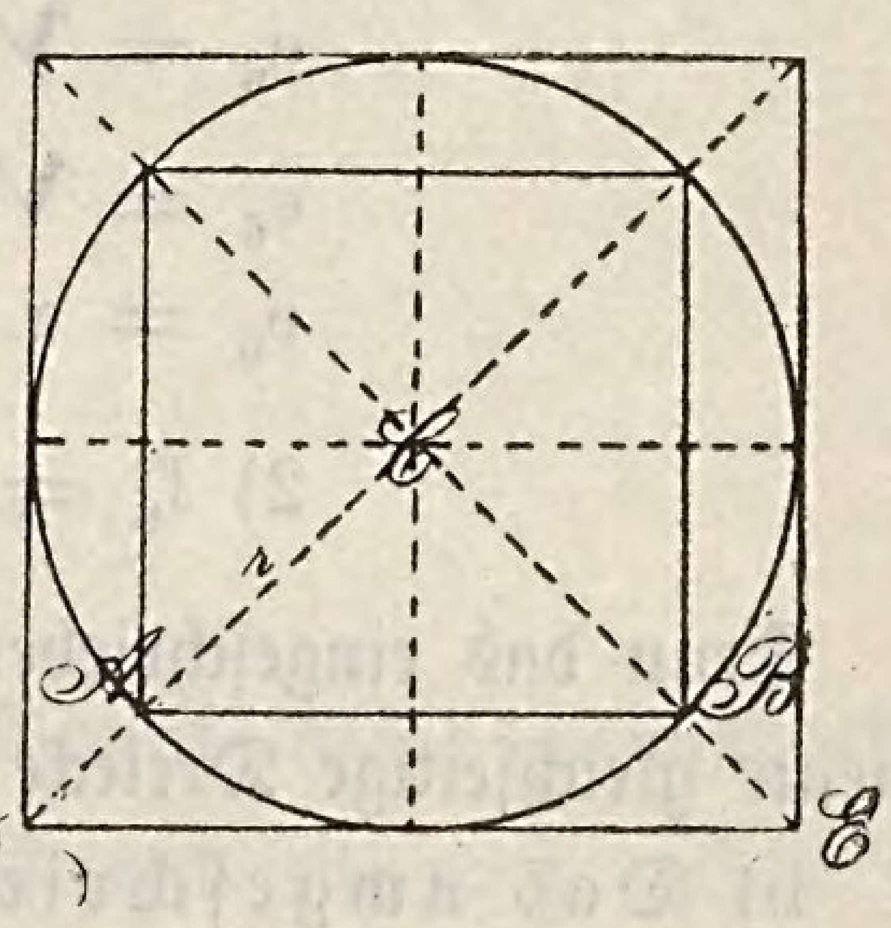
Oder: Sieht man das gegebene gleichseitige Dreieck als ein dem größeren Kreis eingeschriebenes an, so folgt nach a) 1) dieser Aufgabe:

$$R\sqrt{3} = a$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

II. Das regelmäßige Viereck.

a) Das eingeschriebene. Fig. 39.



Aus der Figur 39 folgt unmittelbar:

1) $e_4{}^2 = r^2 + r^2$

$e_4 = r\sqrt{2}.$

2) $f_4 = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2.$

b) Das umgeschriebene.

1) I. Das vom Mittelpunkte des Kreises auf die Vierecksseite gefällte Lot ist:

$$\sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \sqrt{\frac{2r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{2};$$

nun die Proportion:

$$\frac{r}{2}\sqrt{2} : r = r\sqrt{2} : u_4$$

$$u_4 = \frac{r^2\sqrt{2} \cdot 2}{r\sqrt{2}}$$

$$u_4 = 2r.$$

Daß das oben genannte Lot $\frac{1}{2}r\sqrt{2}$ ist, folgt auch kurz daraus, daß es die eine Kathete in einem gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieck ist.

$$\text{II. } u_4 = \frac{2 \cdot r\sqrt{2} \cdot r}{\sqrt{4r^2 - (r\sqrt{2})^2}}$$

$$u_4 = \frac{2r^2\sqrt{2}}{\sqrt{2r^2}}$$

$$u_4 = 2r.$$

III. Auch die unmittelbare Anschauung zeigt, daß $u_4 = 2r$ ist.

$$2)\ F_4 = (2r)^2 = 4r^2.$$

Zusatz (vergl. S. 138) $1)\ r = \frac{a}{2}$

$$2)\ R = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

III. Das regelmäßige Sechseck.

a) Das eingeschriebene.

$$1)\ e_6 = r.$$

Diesen Wert könnte man auch finden, wenn man in die Formel 3 des Anhangs III für a den Wert $r\sqrt{3}$ einsetzte, nämlich:

$$e_6 = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - (r\sqrt{3})^2}}$$

$$e_6 = \sqrt{2r^2 - r^2}$$

$$e_6 = r.$$

$$2)\ f_6 = 6 \cdot \frac{r^2}{4}\sqrt{3} = \tfrac{3}{2} \cdot r^2\sqrt{3}.$$

Denn das eingeschriebene regelmäßige Sechseck läßt sich in 6 kongruente gleichseitige Dreiecke mit der Seite = r zerlegen.

b) Das umgeschriebene.

1) I. Das vom Zentrum auf die Sechseckseite gefällte Lot ist $\sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{3}.$ Nun die Proportion:

$$\frac{r}{2}\sqrt{3} : r = r : \mu_6$$

$$u_6 = \frac{r^2 \cdot 2}{r\sqrt{3}} = \tfrac{2}{3}\,r\sqrt{3}.$$

$$\text{II.} \quad u_6 = \frac{2 \cdot r \cdot r}{\sqrt{4r^2 - r^2}}$$

$$u_6 = \tfrac{2}{3} r \sqrt{3}.$$

$$2)\ F_6 = \frac{(\tfrac{2}{3} r \sqrt{3})^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot 6$$

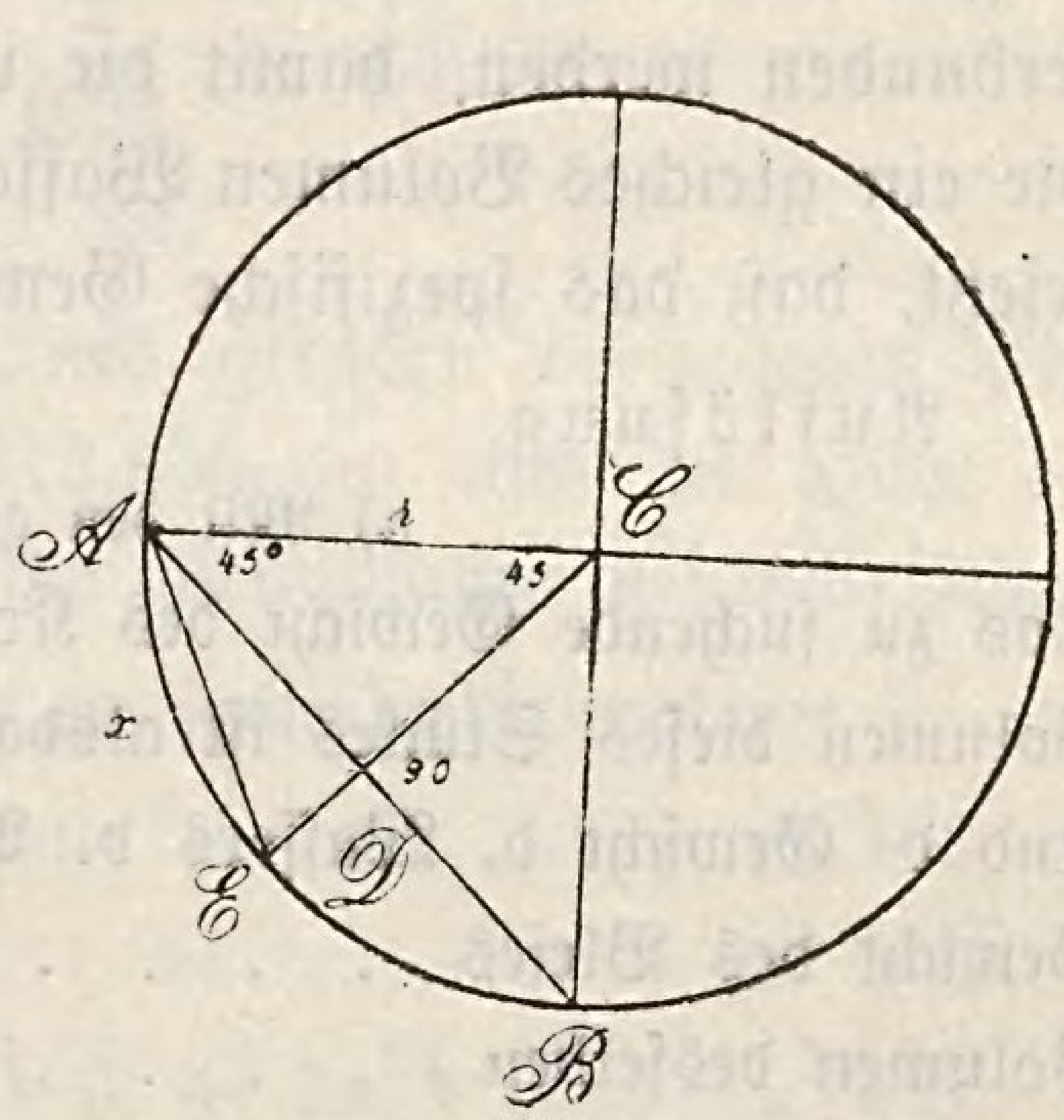
$$F_6 = 2r^2 \sqrt{3}.$$

Zusatz. $\quad 1)\ r = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$

$\quad 2)\ R = a.$

4) Aus dem Radius $r = 8$ cm eines Kreises soll die Seite des eingeschriebenen regulären Achtecks berechnet werden.

Fig. 40.



Auflösung. In Fig. 40 sei AB die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Vierecks und $AE = x$ die des eingeschriebenen regelmäßigen Achteckes. Diese läßt sich nun auf verschiedene Weise finden:

1) Die Seite AB des eingeschriebenen Viereckes ist $\sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$. Nun ist

$$CD = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2}$$

$$CD = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \sqrt{\frac{2r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{2}.$$

Dies folgt auch einfach daraus, daß Dreieck ACD gleichschenklig und rechtwinklig und deshalb $CD = AD = \frac{1}{2}$ Viereckseite $= \frac{1}{2} \cdot r\sqrt{2}$ ist.

Da nun $DE = r - \frac{r}{2}\sqrt{2}$ ist, so folgt:

$$x^2 = \left(\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(r - \frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2$$

$$x^2 = \frac{r^2}{2} + r^2 - r^2\sqrt{2} + \frac{r^2}{2}$$

$$x^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{2}$$

$$x = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

2) Benützt man die Formel 3 des Anhangs III, indem man für a den Wert $r\sqrt{2}$ substituiert, so ist:

$$x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - (r\sqrt{2})^2}}$$

$$x = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{2}}$$

$$x = \sqrt{r^2(2 - \sqrt{2})}$$

$$x = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

b) **Stereometrische Aufgaben.**

5) Wieviel kg Korkholz vom spezifischen Gewicht $s = 0{,}24$ müssen mit einem Würfel aus Blei, welcher $a = 3{,}4726$ kg wiegt, verbunden werden, damit die verbundenen Körper dasselbe wiegen, wie ein gleiches Volumen Wasser, also im Wasser schweben, vorausgesetzt, daß das spezifische Gewicht des Bleies $p = 11{,}35$ ist.

Auflösung.

a) Mit den gegebenen Buchstaben.

Das zu suchende Gewicht des Korkholzes sei	x kg
Volumen dieses Stückes ist alsdann	$x : s$ cdm*)
Und d. Gewicht d. Wassers v. Vol. dieses Stückes . .	$x : s$ kg
Gewicht des Bleies	a kg
Volumen desselben	$a : p$ cdm
Gewicht des von ihm verdrängten Wassers	$a : p$ kg

Da nun der Aufgabe gemäß das Gewicht der beiden verbundenen Körper so viel betragen soll, als das Gewicht der von denselben verdrängten Wassermasse, so ergibt sich die folgende Gleichung:

$$x + a = \frac{x}{s} + \frac{a}{p}$$

Die Nenner beseitigt: $psx + aps = px + as$

Transponiert: $psx - px = -aps + as$

Mit -1 multiplic.: $px - psx = aps - as$

x herausgetrennt: $x(p - ps) = aps - as$

x isoliert: $$x = \frac{asp - as}{p - ps}$$

Zusammengezogen: $$x = \frac{as(p - 1)}{p(1 - s)}$$

---

*) Um Raum zu sparen, steht hier und in ähnlichen Fällen $x : s$ statt $\frac{x}{s}$.

Die geg. Zahlen eingesetzt: $x = \frac{3{,}4726 \cdot 0{,}24\ (11{,}35 - 1)}{11{,}35\ (1 - 0{,}24)}$

Das ist: $x = 1$ kg.

b) Mit den gegebenen Zahlen.

Das zu suchende Gewicht des Korkholzes sei . . . . x kg
Volumen dieses Stückes ist alsdann . . . . x : 0,24 cdm
Gewicht des von demselben verdrängten Wassers . . . x : 0,24 kg
Gewicht des Bleies . . . . 3,4726 kg
Volumen desselben: 3,4726 : 11,35 = ... 0,3059 cdm
Gewicht des von demselben verdrängten Wassers . . . 0,3059 kg
Daher die Gleichung:

$$x + 3{,}4726 = \frac{x}{0{,}24} + 0{,}3059$$

Und hieraus: $x = 1$ kg.

6) Die gesamte Oberfläche O eines geraden dreiseitigen Prismas mit regulärer Basis beträgt 313,856 qm und die Höhe desselben h = 25 m. Wie groß ist eine Grundkante dieses Prismas?

Auflösung. Angenommen, die zu suchende Grundkante sei x m
Der Inhalt der Grundfläche ist alsdann: . . . . $\frac{1}{4} x^2 \sqrt{3}$ qm
„ „ „ Deckfläche ebenfalls: . . . . . $\frac{1}{4} x^2 \sqrt{3}$ „
„ „ beider Flächen also: $\frac{1}{4}x^2\sqrt{3} + \frac{1}{4}x^2\sqrt{3} = \frac{1}{2}x^2\sqrt{3}$ „
Und der Inhalt der 3 Seitenflächen: . . $3 \cdot xh =$ 3xh „
Die gesamte Oberfläche beträgt demnach: . $\frac{1}{2}x^2\sqrt{3} +$ 3xh „
Da dieselbe mit O bezeichnet ist, so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{x^2}{2}\sqrt{3} + 3hx = O$$

Nenner beseitigt: $$x^2\sqrt{3} + 6hx = 2O$$

x^2 isoliert: $$x^2 + \frac{6hx}{\sqrt{3}} = \frac{2O}{\sqrt{3}}$$

Quadrat ergänzt: $$x^2 + \frac{6h}{\sqrt{3}}x + \left(\frac{3h}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2O}{\sqrt{3}} + \left(\frac{3h}{\sqrt{3}}\right)^2$$

Oder: $$\left(x + \frac{3h}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2O}{\sqrt{3}} + \frac{9h^2}{3}$$

Die Quadr. gezogen: $$x + \frac{3h}{\sqrt{3}} = \pm\sqrt{\frac{2O}{\sqrt{3}} + 3h^2}$$

Transponiert: $x = -\frac{3h}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}} + 3h^2}$

Die Nenner rat. gemacht: $x = -\frac{3h\sqrt{3}}{3} \pm \sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{3} + 3h^2}$

Oder: $x = -h\sqrt{3} + \sqrt{\frac{2}{3}0\sqrt{3} + 3h^2}$

Die geg. Zahlen eingeſ.: $x = -25\sqrt{3} + \sqrt{\frac{2}{3}\cdot 313{,}856\sqrt{3} + 3\cdot 25^2}$

Ausgerechnet: $x = 4$ m als Länge der Grundkante.

7) Die Seitenkante AD = BD = CD einer geraden dreiſeitigen Pyramide beträgt a = 6 m, und die Seite AB = BC = AC der regulären Baſis b = 4 m. Wie groß iſt: 1) die geſamte Oberfläche O, 2) die Höhe DE = h und 3) der Inhalt K dieſer Pyramide?

Auflöſung zu 1). S. Fig. 40a.

a) Mit den gegebenen Buchſtaben.

Inhalt der Grundfläche: . . . . $\frac{1}{4} \cdot b^2\sqrt{3}$ qm

Höhe DF eines Seitendreieckes ACD . . . . $\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2}$ m

Inhalt „ „ . . . . $\frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2}$ qm

Inh. der drei Drei. des Mant.: $3 \cdot \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2} = \frac{3b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$.

Geſamte Oberfl.:

$$O = \frac{b^2}{4}\sqrt{3} + \frac{3b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2} = \frac{b}{4}\left[b\sqrt{3} + 3\sqrt{(2a+b)(2a-b)}\right]$$

Mit Berückſ. der geg. Zahlen $\frac{4}{4}\left[4 \cdot 1{,}732 + 3\sqrt{(2\cdot 6+4)(2\cdot 6-4)}\right]$

Das iſt: 40,858 qm.

b) Mit den gegebenen Zahlen.

Inhalt der Grundfläche: $\frac{1}{4} \cdot 4^2 \cdot \sqrt{3}$ = ... 6,928 qm

Höhe eines Seitendreieckes: $\sqrt{6^2 - \frac{1}{4}\cdot 4^2}$ = ... 5,656 m

Inhalt eines ſolchen: $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5{,}656$ = ... 11,31 qm

Inhalt der 3 Manteldreiecke: $3 \cdot 11{,}31$ = ... 33,93 „

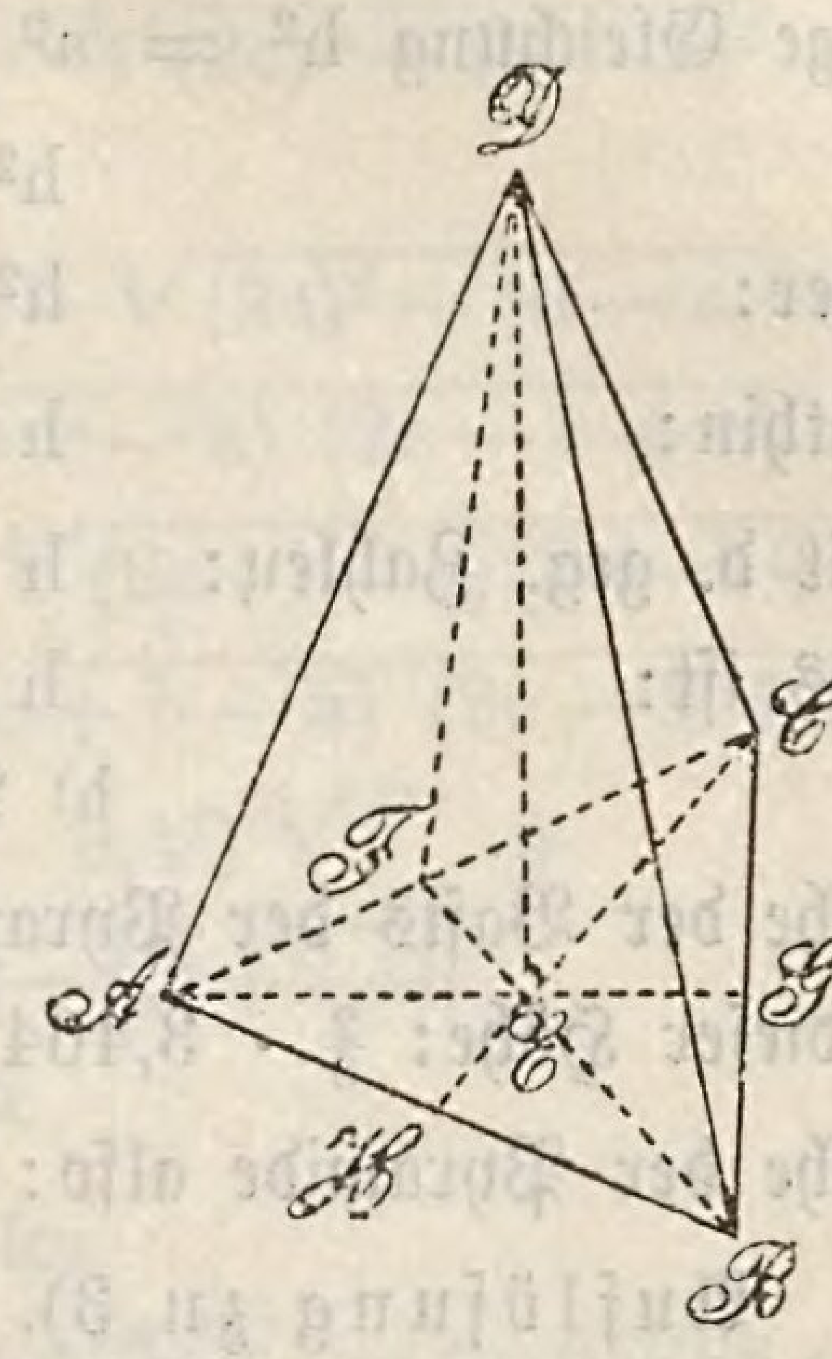
Geſamte Oberfläche: $6{,}928 + 33{,}93$ = ... 40,858 „

Auflöſung zu 2).

a) Mit den gegebenen Buchſtaben.

Denkt man ſich in der Pyramide ABCD, Fig. 40a, die Höhe h

Fig. 40a.



gezogen, so ist der Fußpunkt derselben zugleich der Mittelpunkt der Grundfläche, denn die Höhe einer regelmäßigen Pyramide trifft die Grundfläche im Mittelpunkte. Somit sind, da der Mittelpunkt eines regelmäßigen Vielecks (d. h. der gemeinsame Mittelpunkt des demselben um- und eingeschriebenen Kreises) von den Ecken desselben gleichweit entfernt ist, die von dem Fußpunkte der Höhe der Pyramide nach den drei Eckpunkten der regulären dreiseitigen Basis gezogenen Linien EB, EC und EA einander gleich. Jede dieser Linien nun, die kurzweg c genannt werden soll, bildet mit der Höhe h und der zugehörigen Seitenkante a der Pyramide ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem c eine Kathete, h die andere Kathete und a die Hypotenuse bildet; es ist daher $h^2 = a^2 - c^2$. Da in der Aufgabe c nicht gegeben ist, so kommt es nun darauf an, diese Größe durch die gegebenen Größen zu bestimmen. Dies kann in folgender Weise geschehen. Nach einem planimetrischen Satze durchschneiden sich die drei Höhen eines jeden Dreieckes (d. h. die aus den Ecken auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Lote) in dem nämlichen Punkte, und nach einem andern Satze der Planimetrie durchschneiden sich die drei Mittellinien (d. h. die Linien, welche die Ecken mit den Mitten der gegenüberstehenden Seiten verbinden) ebenfalls in dem nämlichen Punkte und zwar so, daß der Abschnitt an der Gegenseite halb so groß ist, als der Abschnitt am Winkelpunkte, daß also der erstere Abschnitt $\frac{1}{3}$, der letztere $\frac{2}{3}$ der ganzen Transversalen ausmacht. Da nun in einem gleichseitigen Dreieck die soeben genannten zwei Punkte in einen, nämlich in den Mittelpunkt desselben, zusammenfallen, so sind die durch den Fußpunkt der Höhe der Pyramide und die Ecken des Grundflächendreieckes nach den gegenüberstehenden Seiten gezogenen Linien Mittellinien und Höhen des regulären Dreieckes. Daraus folgt nun, daß der am Winkelpunkte gelegene Abschnitt einer solchen (oder: die vom Mittelpunkte nach den Ecken des Dreieckes gezogene Linie c) $\frac{2}{3}$ von der ganzen Höhe des gleichseitigen Dreieckes ist. Da letztere $\frac{1}{2}b\sqrt{3}$ beträgt, so ist erstere

oder $c = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}b\sqrt{3} = \frac{1}{3}b\sqrt{3}$. Setzt man nun diesen Wert in obige Gleichung $h^2 = a^2 - c^2$ für c ein, so erhält man:

$$h^2 = a^2 - (\tfrac{1}{3}b\sqrt{3})^2$$

Oder: $h^2 = a^2 - \frac{1}{3}b^2$

Mithin: $h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}b^2}$

Mit d. geg. Zahlen: $h = \sqrt{6^2 - \frac{1}{3} \cdot 4^2}$

Das ist: $h = 5{,}53$ m.

b) Mit den gegebenen Zahlen.

Höhe der Basis der Pyramide: $\frac{1}{2}4\sqrt{3}$ = ... 3,464 m

$\frac{2}{3}$ dieser Höhe: $\frac{2}{3} \cdot 3{,}464$ = ... 2,309 „

Höhe der Pyramide also: $\sqrt{6^2 - 2{,}309^2}$ = ... 5,53 „

Auflösung zu 3). Inhalt der Grundfläche: . . $\frac{1}{4}b^2\sqrt{3}$ qm

Höhe d. Pyramide: $\sqrt{\frac{3a^2 - b^2}{3}}$, $\frac{1}{3}$ derselben also $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3a^2 - b^2}{3}}$ m

Volumen K der Pyramide mithin:

$$\tfrac{1}{4}b^2\sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{3a^2 - b^2}{3}} = \frac{b^2}{12}\sqrt{3a^2 - b^2}$$

Mit Berücksichtigung der geg. Z. $K = \frac{1}{12} \cdot 4^2 \cdot \sqrt{3 \cdot 6^2 - 4^2}$

Das ist: $K = 12{,}35$ cbm.

8) Wie groß ist die Oberfläche O eines geraden sechsseitigen Pyramidenstumpfes, wenn die Kante der Grundfläche $b = 4{,}6$ m, die der Deckfläche $a = 2{,}4$ m lang ist und eine Seitenkante $c = 8{,}2$ m mißt?

Auflösung.

a) Mit den gegebenen Buchstaben.

Inhalt der Grundfläche: $6 \cdot \frac{1}{4}b^2\sqrt{3}$ = ... $\frac{3}{2}b^2\sqrt{3}$ qm

„ „ Deckfläche: $6 \cdot \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ = ... $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$ „

Höhe*) einer Seitenfläche: $\sqrt{c^2 - (\frac{1}{2}(b-a))^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2c)^2 - (b-a)^2}$ m

---

*) Denkt man sich von den Endpunkten einer Kante der Deckfläche Lote auf die Kante der Grundfläche gefällt, so entstehen zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke. Die Seiten eines solchen sind die gegebene Seitenkante c, die zu suchende Höhe einer Seitenfläche, also eines Trapezes, bezw. eines Antiparallelogramms und die Hälfte des Unterschiedes zwischen beiden Kanten, nämlich $^1/_2$ (b – a). Daß die eine Seite des rechtw. Dreieckes wirklich $^1/_2$ (b a) ist, folgt aus der Kongruenz der genannten 2 Dreiecke.

Inhalt einer solchen:

$\frac{1}{2}(b + a) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(2c)^2 - (b - a)^2} = \frac{1}{4}(b + a) \cdot \sqrt{(2c)^2 - (b - a)^2}$ qm

Inhalt des Mantels:

$6 \cdot \frac{1}{4}(b + a) \cdot \sqrt{(2c)^2 - (b - a)^2} = \frac{3}{2}(b + a) \cdot \sqrt{(2c)^2 - (b - a)^2}$ qm

Oder: $\frac{3}{2}(b + a) \cdot \sqrt{(2c + b - a)(2c - b + a)}$ qm

Ges. Obfl.: $O = \frac{3}{2}b^2\sqrt{3} + \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} + \frac{3}{2}(b+a) \cdot \sqrt{(2c+b-a)(2c-b+a)}$

Oder: $O = \frac{3}{2}[(b^2 + a^2)\sqrt{3} + (b + a)\sqrt{(2c + b - a)(2c - b + a)}]$

Mit den gegebenen Zahlen: $O = \frac{3}{2}[(4{,}6^2 + 2{,}4^2)\sqrt{3} +$
$(4{,}6 + 2{,}4)\sqrt{(2 \cdot 8{,}2 + 4{,}6 - 2{,}4)(2 \cdot 8{,}2 - 4{,}6 + 2{,}4)}]$

Das ist: $O = 240{,}56316$ qm.

b) Mit den gegebenen Zahlen.

Inhalt der Grundfl.: $6 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4{,}6^2\sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot 4{,}6^2\sqrt{3} = 54{,}97368$ qm

„ „ Deckfl.: $6 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2{,}4^2\sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot 2{,}4^2\sqrt{3} = 14{,}96448$ „

Differenz der untern u. ob. Kante: $4{,}6 - 2{,}4 =$ 2,2 m

Halbe Differenz derselben: $\frac{1}{2} \cdot 2{,}2 =$ . . . . . 1,1 „

Höhe einer Seitenfläche: $\sqrt{8{,}2^2 - 1{,}1^2} =$ . . . . . 8,125 „

Inhalt einer solchen: $\frac{1}{2} \cdot (4{,}6 + 2{,}4) \cdot 8{,}125 =$ . . 28,4375 qm

„ des Mantels: $6 \cdot 28{,}4375 =$ . . . . . 170,625 „

Gesamte Oberfläche: $54{,}97368 + 14{,}96448 + 170{,}625$ „

Das ist: 240,56316 qm.

9) Ein 3,5 m langer Baumstamm wird zu einem Brunnenrohre von 8 cm lichter Weite ausgebohrt. Wie groß ist die Wandstärke des Rohres, wenn die Holzmasse nach Entfernung des Abfalles noch 338492 ccm beträgt?

Auflösung. 1) Bezeichnet man den Radius des ganzen Cylinders mit x cm, so ist der Inhalt desselben $x^2 \cdot 3{,}14 \cdot 350$ ccm. Da nun das Volumen des hohlen Raumes $4^2 \cdot 3{,}14 \cdot 350$ ccm beträgt, so erhält man die folgende Gleichung:

$$x^2 \cdot 3{,}14 \cdot 350 - 4^2 \cdot 3{,}14 \cdot 350 = 338492,$$

Oder:
$$3{,}14 \cdot 350\,(x^2 - 4^2) = 338492,$$
$$x^2 - 4^2 = \frac{338492}{3{,}14 \cdot 350},$$
$$x^2 - 16 = 308,$$
$$x^2 = 324,$$
$$x = 18.$$

Mithin ist die Wandstärke: 18 cm — 4 cm = **14** cm.

2) Bezeichnet man die zu suchende Wandstärke mit x cm, so ist der Radius des Stammes (x + 4) cm, und man erhält nun die Gleichung:

$$(4 + x)^2 \cdot 3{,}14 \cdot 350 - 4^2 \cdot 3{,}14 \cdot 350 = 338492,$$
$$3{,}14 \cdot 350\,((4 + x)^2 - 4^2) = 338492,$$
$$(4 + x)^2 - 4^2{}^{*)} = 308,$$
$$(4 + x + 4)(4 + x - 4) = 308,$$
$$x^2 + 8x = 308,$$
$$x^2 + 8x + 4^2 = 308 + 16,$$
$$(x + 4)^2 = 324,$$
$$(x + 4 = \pm 18,$$
$$x = -4 \pm 18,$$
$$x_1 = \mathbf{14} \text{ cm}$$ als die zu suchende Wandstärke.

3) Die Grundfläche des fertigen Brunnenrohres ist: 338942 : 350 = 967,12 qcm.

Die ganze Grundfläche des Baumstammes beträgt 967,12 qcm + $4^2 \cdot 3{,}14$ qcm = 1017,36 qcm.

Mithin ist der Radius der Grundfläche:

$$\sqrt{1017{,}36 : 3{,}14} = \sqrt{324} = 18 \text{ cm}.$$

Die Wandstärke ist also 18 cm — 4 cm = **14** cm.

4) Das Volumen des hohlen Raumes ist: $4^2 \cdot 3{,}14 \cdot 350$ ccm.

Das Volumen des ganzen Stammes beträgt mithin: $4^2 \cdot 3{,}14 \cdot 350$ ccm + 338942 ccm.

Der Radius des ganzen Stammes ist mithin:

$$\sqrt{\frac{4^2 \cdot 3{,}14 \cdot 350 + 338492}{3{,}14 \cdot 350}}$$
$$= \sqrt{4^2 + 308}$$
$$= \sqrt{324} = 18, \text{ u. s. w.}$$

10) Ein eiserner Cylinder, dessen Radius r = 0,2 m und dessen Höhe H = 1,2 m ist, soll mit einem cylinderförmigen Korkringe umgeben werden, der eine Höhe von h = 0,4 m hat. Wie groß muß der große Radius dieses Ringes sein, wenn das spez. Gewicht des Eisens S = 7,79, das des Korkes s = 0,24 ist und

---

*) Oder: $(4 + x)^2 = 308 + 16$, u. s. w.

beide verbundene Körper mit dem Wasser im Gleichgewichte sein sollen?

Auflösung.

a) Mit den gegebenen Buchstaben.

Volumen des eisernen Cylinders: . . . . $r^2\pi H$

Gewicht desselben: . . . . $r^2\pi HS$

Volumen des Korkr., seinen gr. R gleich x gesetzt: . . $(x^2 - r^2)\pi h$

Gewicht desselben: . . . . $(x^2 - r^2)\pi hs$

Da nun das Gewicht der von den beiden Körpern verdrängten Wassermasse dem Gewichte der Körper gleich sein soll, so ergibt sich die folgende Gleichung:

$$r^2\pi H + (x^2 - r^2)\,\pi h = r^2\pi HS + (x^2 - r^2)\,\pi hs$$

Durch π gekürzt: $r^2H + (x^2 - r^2)\,h = r^2HS + (x^2 - r^2)\,hs$

Kl. gelöst: $r^2H + hx^2 - hr^2 = HSr^2 + hsx^2 - hsr^2$

Transponiert: $hx^2 - hsx^2 = HSr^2 - Hr^2 + hr^2 - hsr^2$

Zusammengezogen: $x^2(h - hs) = Hr^2\,(S - 1) + hr^2\,(1 - s)$

x^2 isoliert: $x^2 = \dfrac{Hr^2\,(S - 1)}{h\,(1 - s)} + \dfrac{hr^2\,(1 - s)}{h\,(1 - s)}$

Gekürzt: $x^2 = \dfrac{Hr^2\,(S - 1)}{h\,(1 - s)} + r^2$

Zusammengezogen: $x^2 = r^2\left[\dfrac{H\,(S - 1)}{h\,(1 - s)} + 1\right]$

Oder: $x^2 = r^2\left[\dfrac{S - 1}{1 - s} \cdot \dfrac{H}{h} + 1\right]$

Radiciert: $x = r\sqrt{\dfrac{S - 1}{1 - s} \cdot \dfrac{H}{h} + 1}$

D. geg. Zahl. einges.: $x = 0{,}2\sqrt{\dfrac{7{,}79 - 1}{1 - 0{,}24} \cdot \dfrac{1{,}2}{0{,}4} + 1}$

Das ist: $x = 1{,}054$ m als gr. R. des Korkringes.

b) Mit den gegebenen Zahlen.

Volumen des eisernen Cylinders: $0{,}2^2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}2 =$. $0{,}15072$

Gewicht desselben: $0{,}15072 \cdot 7{,}79 =$ . . . . $1{,}1741088$

Vol. d. Korkringes: $(x^2 - 0{,}2^2) \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}4 = 1{,}256\,x^2 - 0{,}05024$

Gew. dess.: $(1{,}256x^2 - 0{,}05024) \cdot 0{,}24 = 0{,}30144x^2 - 0{,}0120576$

Daher die Gleichung:

$$0{,}15072 + (1{,}256x^2 - 0{,}05024) = 1{,}1741088 + 0{,}30144x^2 - 0{,}0120575$$

Transp. u. zusammengefaßt: $0{,}95456\ x^2 = 1{,}0615713$

x^2 isoliert: $x^2 = 1{,}1121$

Quadratw. gezogen: $x = 1{,}054$ m.

11) Die gesamte Oberfläche eines geraden Kegels beträgt $O = 628$ qm und der Radius der Basis $r = 8$ m. Wie hoch ist dieser Kegel?

Auflösung.

a) Mit den gegebenen Buchstaben.

Inhalt der Grundfläche des Kegels: . . . . $r^2\pi$ qm

Seitenl. desselben, seine Höhe mit x bezeichnet: . . $\sqrt{r^2 + x^2}$ m

Mantel des Kegels: . . . . $r\pi\sqrt{r^2 + x^2}$ qm

Gesamte Oberfläche desselben: . . . . . $r^2\pi + r\pi\sqrt{r^2 + x^2}$ „

Da dieselbe mit O bezeichnet ist, so erhält man folgende Gleichung:

$$r^2\pi + r\pi\sqrt{r^2 + x^2} = O$$

Transponiert: $r\pi\sqrt{r^2 + x^2} = O - r^2\pi$

Durch $r\pi$ dividiert: $\sqrt{r^2 + x^2} = \frac{O}{r\pi} - r$

Mit 2 potenziert: $r^2 + x^2 = \frac{O^2}{r^2\pi^2} - \frac{2O}{\pi} + r^2$

Transponiert und reduciert: $x^2 = \frac{O^2 - 2Or^2\pi}{r^2\pi^2}$

Beiders. Quadratw. gezogen: $x = \frac{\sqrt{O^2 - 2Or^2\pi}}{r\pi}$

Oder: $x = \frac{\sqrt{O(O - 2r^2\pi)}}{r\pi}$

D. geg. Zahl. eingesetzt: $x = \frac{\sqrt{628\,(628 - 2 \cdot 8^2 \cdot 3{,}14)}}{8 \cdot 3{,}14}$

Das ist: $x = 15$ m als Höhe des Kegels.

b) Mit den gegebenen Zahlen.

α) Algebraisch.

Inhalt der Grundfläche des Kegels: . . $8^2 \cdot 3{,}14 = 200{,}96$ qm

Seitenl. dess. seine Höhe mit x bezeichnet: . . . . $\sqrt{8^2 + x^2}$ m

Mantel des Kegels: $8 \cdot 3{,}14\,\sqrt{8^2 + x^2} = 25{,}12\,\sqrt{64 + x^2}$ qm

Gesamte Oberfläche desselben: . $200{,}96 + 25{,}12\,\sqrt{64 + x^2}$ „

Daher die Gleichung:

$$200{,}96 + 25{,}12\,\sqrt{64 + x^2} = 628$$

Transponiert: $25{,}12\sqrt{64 + x^2} = 427{,}04$

Durch 25,12 dividiert: $\sqrt{64 + x^2} = 17$

Mit 2 potenziert: $64 + x^2 = 289$

Transponiert: $x^2 = 225$

Radiciert: $x = 15\text{m}.$

β) Arithmetisch.

Inhalt der Grundfläche des Kegels: $8^2 \cdot 3{,}14 = \ldots 200{,}96$ qm

„ des Mantels desselben: $628 - 200{,}96 = \ldots 427{,}04$ „

Seitenlinie des Kegels: $427{,}04 : 8 \cdot 3{,}14 = \ldots 17$ m

Folglich die Höhe desselben: $\sqrt{17^2 - 8^2} = \ldots 15$ m.

12) Aus einem Baumstamme, der $h = 12$ m lang ist und dessen Endflächenradien $R = 1{,}8$ m und $r = 1{,}2$ m messen, soll ein ebenso langer viereckiger Balken geschnitten werden, und zwar sollen die Quadrate, welche sich in die Grundflächen des Stammes einschreiben lassen, die beiden Grundflächen dieses Balkens werden. Wie groß ist 1) der Inhalt K desselben und 2) der Abfall A an Holz?

Auflösung zu 1). Man veranschauliche zunächst die beiden Endflächen durch Kreise und zeichne Quadrate in dieselben ein.

Seitenl. d. in das gr. Stammende eingesch. Quad.: $\sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$ m

„ „ „ „ kl. „ „ „ $\sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$ „

Inhalt des ersteren Quadrats: $(R\sqrt{2})^2 = \ldots\ 2R^2$ qm

„ „ zweiten „ $(r\sqrt{2})^2 = \ldots\ 2r^2$ „

Inhalt des aus dem Baumstamm geschnittenen pyramidalen Balkens:

$$K = \tfrac{1}{3}h\,(2R^2 + 2r^2 + \sqrt{2R^2 \cdot 2r^2})$$

Oder: $K = \frac{1}{3}h\,(2R^2 + 2r^2 + 2Rr)$

„ $K = \frac{2}{3}h\,(R^2 + r^2 + Rr)$

Zahl. einges.: $K = \frac{2}{3} \cdot 12\,(1{,}8^2 + 1{,}2^2 + 1{,}8 \cdot 1{,}2)$

Das ist: $K = 54{,}72$ cbm als Inhalt d. pyr. Balkens.

Auflösung zu 2).

Inhalt des Baumstammes: . . . . $\frac{1}{3}h\pi\,(R^2 + r^2 + Rr)$ cbm.

Inh. des daraus geschn. Balkens: . . $\frac{2}{3}h\,(R^2 + r^2 + Rr)$ „

Inh. des Holzabfalls: $A = \frac{1}{3}h\pi(R^2+r^2+Rr) - [\frac{2}{3}h(R^2+r^2+Rr)]$

Reduciert $A = \frac{1}{3}h\,(R^2 + r^2 + Rr)\,(\pi - 2)$

Die best. Zahl. einges.: $A = \frac{1}{3} \cdot 12\,(1{,}8^2 + 1{,}2^2 + 1{,}8 \cdot 1{,}2)\,(3{,}14 - 2)$

Das ist: $A = 31{,}1904$ cbm als Inhalt d. Holzabfalls.

13) Eine Hohlkugel aus Eisen vom spez. Gewicht 7,2 sinkt gerade zur Hälfte im Wasser ein. Wie groß ist die Wandstärke derselben, wenn ihr äußerer Radius 30 cm beträgt?

Auflösung.

a) Algebraisch.

1) Der Radius des hohlen Raumes sei x cm; alsdann erhält man die Gleichung:

$$7{,}2\left(\tfrac{4}{3}\cdot 30^3\cdot 3{,}14 - \tfrac{4}{3}\cdot x^3\cdot 3{,}14\right) = \tfrac{2}{3}\cdot 30^3\cdot 3{,}14$$

$$7{,}2\cdot\tfrac{4}{3}\,3{,}14\,(30^3 - x^3) = \tfrac{2}{3}\cdot 3{,}14\cdot 30^3.$$

$$7{,}2\cdot 2\,(30^3 - x^3) = 30^3$$

$$30^3 - x^3 = \frac{30^3}{14{,}4}$$

$$-x^3 = \frac{30^3}{14{,}4} - 30^3$$

$$x^3 = 30^3 - \frac{30^3}{14{,}4}$$

$$x^3 = 30^3\left(1 - \frac{1}{14{,}4}\right)$$

$$x = 30\sqrt[3]{\frac{14{,}4 - 1}{14{,}4}}$$

$$x = 30\sqrt[3]{\frac{13{,}4}{14{,}4}}$$

$$x = 30\sqrt[3]{0{,}930555}$$

$$x = 30\cdot 0{,}976$$

$$x = 29{,}28 \text{ cm}.$$

2) Folglich die Wandstärke: 30 — 29,28 cm = **0,72** cm.

b) Arithmetisch.

1) Das Volumen der ganzen Kugel ist: $\tfrac{4}{3}\cdot 30^3\cdot 3{,}14$ ccm $= 4\cdot 9000\cdot 3{,}14 = 113040$ ccm $= 113{,}04$ cdm.

Da die Kugel bloß zur Hälfte im Wasser einsinkt, so verdrängt sie $\tfrac{1}{2}\cdot 113{,}04$ cdm $= 56{,}52$ cdm Wasser, und diese wiegen 56,52 kg.

Da nun, wie die Physik lehrt, ein schwimmender Körper so weit einsinkt, bis das Gewicht des verdrängten Wassers dem Gewicht des ganzen Körpers gleich ist, so wiegt die Kugelschale 56,52 kg.

Mithin ist das Volumen derselben

$$\frac{56{,}52}{7{,}2} = 7{,}85 \text{ cdm} = 7850 \text{ ccm}.$$

Nun ist aber das Volumen der ganzen Kugel 113040 ccm, folglich das der Hohlkugel 113040 — 7850 = 105190 ccm.

Der Kubus des Radius dieses hohlen Raumes muß mithin, da $v = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot 3{,}14$ ist, sein: $\frac{105190 \cdot 3}{4 \cdot 3{,}14} = 25125$ ccm.

Der Radius also selbst: $\sqrt[3]{25125} = 29{,}25$ cm.

Mithin die Wandstärke 0,75 cm.

2) Mit Benützung der naheliegenden Rechenvorteile:

Das Volumen der ganzen Kugel: $\frac{4}{3} \cdot 30^3 \cdot 3{,}14$ ccm.

Das Volumen der halben Kugel: $\frac{4}{3} \cdot 30^3 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{1}{2}$ ccm.

Das Gewicht des verdrängten Wassers: $\frac{4}{3} \cdot 30^3 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{1}{2}$ g.

Folglich ist auch das Gewicht der Kugelschale so groß.

Das Volumen derselben mithin $\frac{4}{3} \cdot 30^3 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{1}{2 \cdot 7{,}2}$.

Das Volumen der Hohlkugel $\frac{4}{3} \cdot 30^3 \cdot 3{,}14 - \frac{4}{3} \cdot 30^3 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{1}{2 \cdot 7{,}2} =$

$$\frac{4}{3} \cdot 30^3 \cdot 3{,}14\left(1 - \frac{1}{14{,}4}\right) = \frac{4}{3} \cdot 30^3 \cdot 3{,}14\left(\frac{14{,}4 - 1}{14{,}4}\right) = \frac{4}{3} \cdot 30^3 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}93055.$$

Folglich ist der Kubus des Radius der Hohlkugel:

$$\frac{\frac{4}{3} \cdot 30^3 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}930555}{\frac{4}{3} \cdot 3{,}14} = 30^3 \cdot 0{,}930555.$$

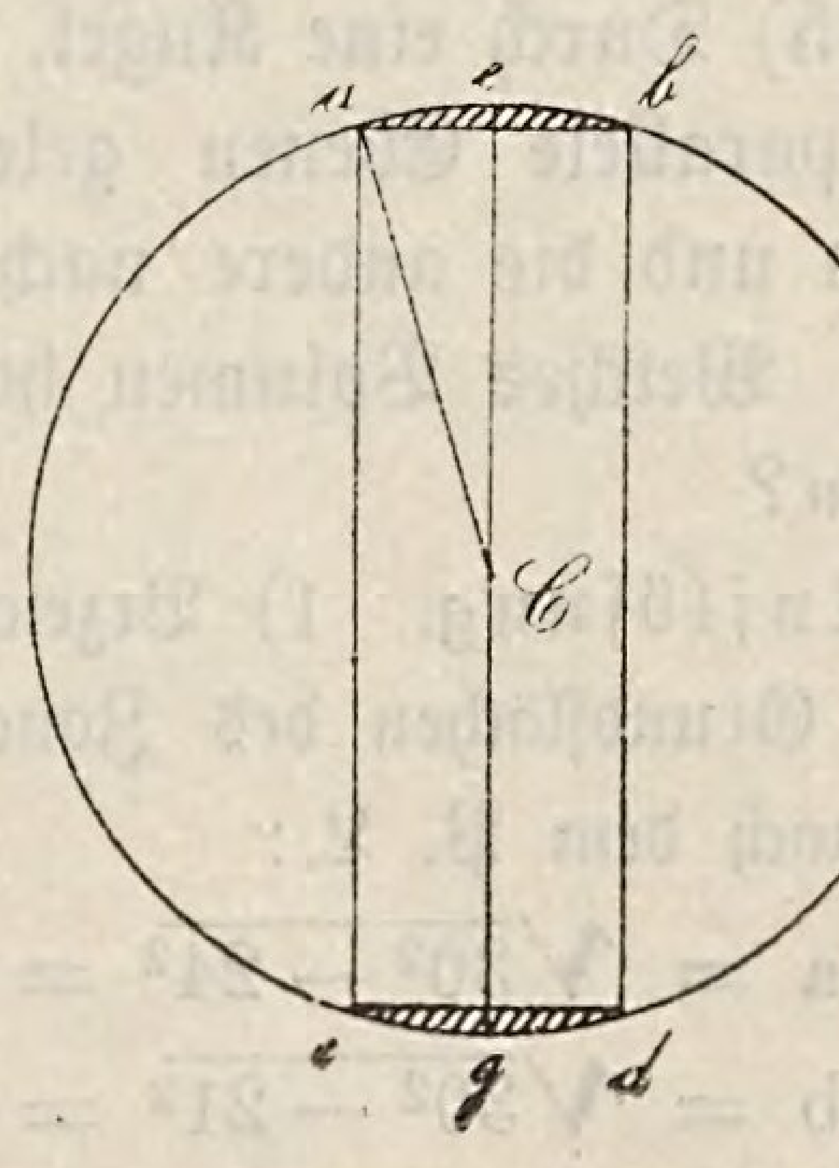
Und der Radius selbst:

$$\sqrt[3]{30^3 \cdot 0{,}930555} = 30\sqrt[3]{0{,}930555} = 30 \cdot 0{,}976 \text{ cm} = 29{,}28 \text{ cm}.$$

Demnach beträgt die Wandstärke: 30 — 29,28 cm = **0,72** cm.

14) Aus einer Kugel, deren Radius 80 cm beträgt, hat man einen geraden cylinderförmigen Kern herausgebohrt, dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht und dessen Radius 32 cm mißt. Wie groß ist das Volumen des übriggebliebenen Teiles?

Fig. 41.



Auflösung. 1) Wie nebenstehende Figur 41 zeigt, findet man das Volumen x des nach der centralen Bohrung übrigbleibenden Teiles, wenn man vom Volumen der ganzen Kugel das Volumen des Cylinders abcd und der beiden Segmente abe und cdg subtrahiert.

Das Volumen V der ganzen Kugel ist:

$$V = \frac{4}{3} \cdot 80^3 \cdot 3{,}14$$

$$V = 2143573{,}3 \text{ ccm.}$$

Die Höhe h des Cylinders ist nach dem Pythag. Lehrsatz:

$$h = 2 \cdot \sqrt{80^2 - 32^2}$$

$$h = 2\sqrt{6400 - 1024}$$

$$h = 2\sqrt{5376}$$

$$h = 2 \cdot 73{,}3 = 146{,}6 \text{ cm (gen. } 146{,}64 \text{ cm).}$$

Mithin ist das Volumen V_1 des Cylinders:

$$V_1 = 32^2 \cdot 3{,}14 \cdot 146{,}64 \text{ ccm}$$

$$V_1 = 471371{,}776 \text{ ccm.}$$

Die Höhe eines der zwei gleichen Segmente ist 80 — 73,32 = 6,68 cm, rund 6,7 cm.

Das Volumen V_2 der beiden Segmente

$$V_2 = 2 \cdot 6{,}7^2 \cdot 3{,}14 \left(80 - \frac{1}{3} \cdot 6{,}7\right)$$

$$V_2 = 21932{,}53576 \text{ ccm.}$$

Demnach ist das Volumen x des übrigen Teiles:

$$x = 2143573{,}3 - (471371{,}776 + 21932{,}53576)$$

$$x = 1650268{,}98824 \text{ ccm.}$$

2) Mit Benützung naheliegender Rechenvorteile erhält man:

$$x = \frac{4}{3} \cdot 80^3 \cdot 3{,}14 - (32^2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 73{,}3 + 2 \cdot 6{,}7^2 \cdot 3{,}14 (80 - \frac{1}{3} 6{,}7)$$

$$x = \frac{4}{3} \cdot 80^3 \cdot 3{,}14 - 3{,}14 \cdot 2 \,(32^2 \cdot 73{,}3 + 6{,}7^2 (80 - \frac{1}{3} \cdot 6{,}7)$$

$$x = 2 \cdot 3{,}14 \left[\frac{2 \cdot 80^3}{3} - (32^2 \cdot 73{,}3 + 6{,}7^2 (80 - \frac{1}{3} \cdot 6{,}7))\right]$$

$$x = 6{,}28 \left(\frac{1024000}{3} - 75059{,}2 - 6{,}7^2 \cdot 77{,}8\right)$$

$$x = 1650268{,}81124 \text{ ccm.}$$

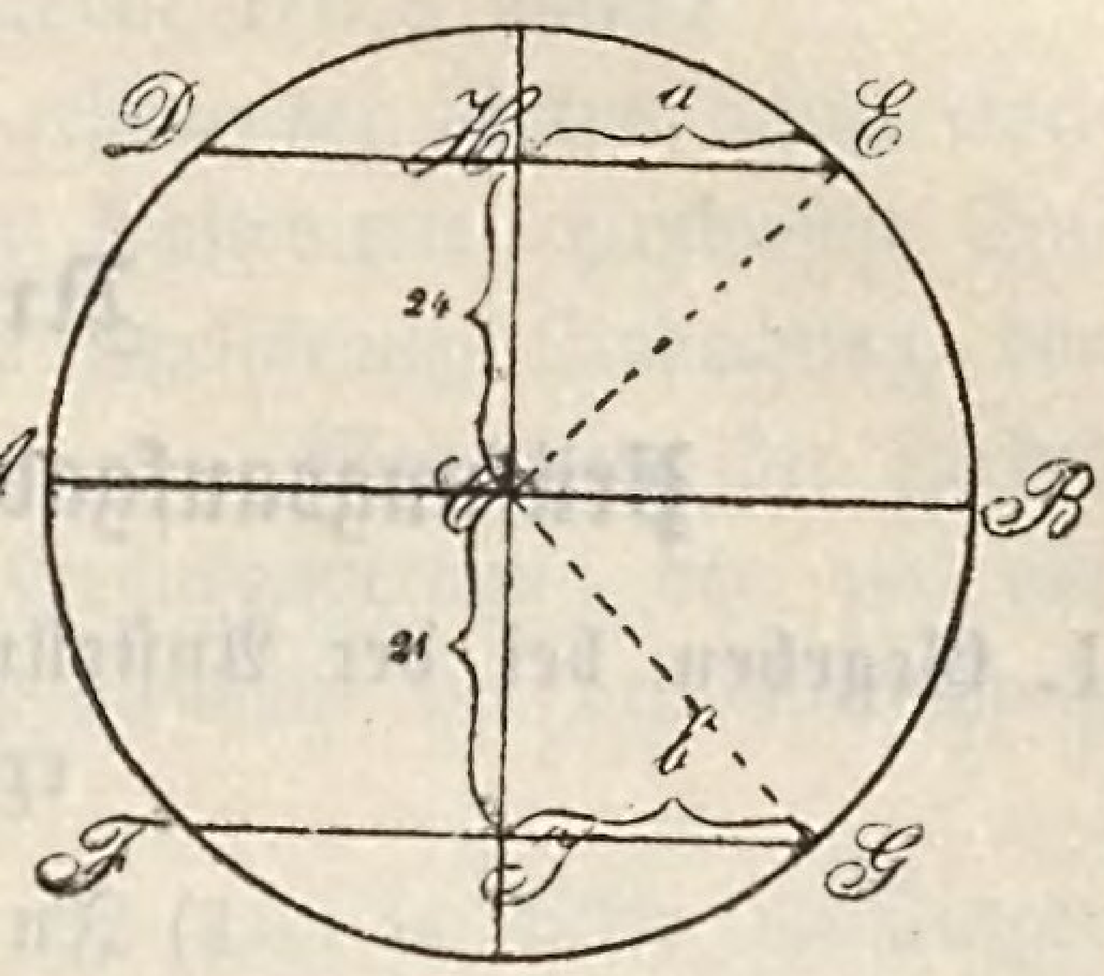
15) Durch eine Kugel, deren Durchmesser 60 cm beträgt, sind zwei parallele Ebenen gelegt. Die eine ist vom Kugelzentrum 24 cm und die andere nach entgegengesetzter Richtung 21 cm entfernt. Welches Volumen hat die Kugelschicht zwischen diesen beiden Ebenen?

Auflösung. 1) Bezeichnet man die Radien EH und FG der beiden Grundflächen des Zonenabschnittes DEFG mit a, bezw. b, so folgt nach dem P. L.:

$$a = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{6^2 \cdot (5^2 - 4^2)} = 6 \cdot 3 = 18 \text{ cm.}$$

$$b = \sqrt{30^2 - 21^2} = \sqrt{3^2 (10^2 - 7^2)} = 3\sqrt{51}.$$

Fig. 42.



Setzt man nun die Werte in die Formel:

$$V = \frac{h\pi}{2}\left(a^2 + b^2 + \frac{h^2}{3}\right)$$

für das Volumen einer Kugelschicht, von welcher die Höhe und die Radien der beiden Grundflächen bekannt sind, so kommt:

$$V = \frac{45 \cdot 3{,}14}{2}\left(18^2 + (3\sqrt{51})^2 + \frac{45^2}{3}\right),$$

$$V = 45 \cdot 1{,}57\ (324 + 459 + 675)$$

$$V = 103007{,}70 \text{ ccm.}$$

2) Das Volumen der Kugelschicht ist gleich der Differenz zwischen dem Volumen der ganzen Kugel und dem der beiden Kugelsegmente.

Das Volumen eines Kugelsegments bei gegebener Höhe und bekanntem Kugelradius ist:

$$V = h^2\pi\left(r - \frac{h}{3}\right)$$

Demnach ist V des oberen Segments: $6^2\pi \cdot 28 = 1008\pi$
Und das des unteren: $9^2 \cdot \pi \cdot 27 = 2187\pi$
Folglich das Volumen beider 3195π.

Das Volumen der ganzen Kugel ist

$$V = \tfrac{4}{3} \cdot r^3\pi = \tfrac{4}{3} \cdot 30^3 \cdot \pi = 36000\pi$$

Demnach ist das Volumen des Zonenabschnitts $36000\pi - 3195\pi = 32805\pi =$ **103007,7** ccm.

Anhang V.

Prüfungsaufgaben aus der Geometrie.

I. Gegeben bei der Anstellungsprüfung bayerischer Schuldienst-exspektanten.

1) In Oberbayern.

a) **Im Jahre 1887.** 1) Ein Hofraum bildet ein Quadrat von 625 qm. In der Mitte desselben wird ein kreisförmiges Blumenbeet von 8 m Durchmesser eingerichtet. Von der Mitte einer jeden Seite des Quadrats bis zum Beet werden 1 m breite Kieswege angelegt; alles andere wird mit Rasen bepflanzt. **a)** Wie groß wird die Rasenfläche? **b)** Wieviel Erde ist zur Anlage des Blumenbeetes nötig, wenn es 20 cm hoch aufgefüllt wird?

2) In ein cylindrisches Gefäß, das einen Durchmesser von 0,9 m hat, und das zum Teil mit Wasser gefüllt ist, wird ein unregelmäßig geformter Stein gelegt, wodurch das Wasser um 0,45 m steigt. Welchen kubischen Inhalt hat der Stein?

b) **Im Jahre 1888.** 1) Ein Gärtner soll ein elliptisches Blumenbeet von 14,08 m Länge und 9,045 m Breite anlegen. **a)** Wie weit hat er die beiden Brennpunkte voneinander zu nehmen? **b)** Wieviel Erde braucht er zur Herstellung dieses Blumenbeetes, wenn dasselbe durchgehends 25 cm hoch werden soll?

2) Das Fundament eines Schornsteines bildet ein Quadrat von 1,4 m Seitenlänge, oben bildet der Schornstein ebenfalls ein Quadrat von 0,6 m Breite, und es beträgt die Höhe des Schornsteines 12,5 m. Wie groß ist der körperliche Inhalt des Mauerwerkes nach Abzug des inneren Raumes von 0,38 m und 0,44 m lichter Weite?

c) **Im Jahre 1889.** 1) Ein Gartensalon von regelmäßig achteckiger Form und $2^1/_2$ m langem Radius des umschreibenden Kreises soll mit Backsteinen von $^1/_4$ m Länge und 1 dm Breite belegt werden. Wie viele solche Steine sind erforderlich?

2) Zu einem kupfernen Kessel, dessen kreisförmige Öffnung eine lichte Weite von 1,20 m hat, soll ein 2 mm dicker Deckel von gleichem Metall gefertigt werden, dessen Rand ringsum 3 cm vorsteht. Wie

schwer wird der Deckel, wenn das spez. Gewicht des Kupfers 8,85 ist und der als Handhabe dienende Messingknopf 475 g wiegt?

d) **Im Jahre 1891.** 1) Ein zu erbauender Zirkus erhält einen Durchmesser von 40 m, die aus Eisen konstruierte cylindrische Einfassung eine Höhe von 10 m, und die kegelförmige Eindachung, von der Dachbasis gerechnet, eine solche von 6 m. Was kostet der Zirkus ohne Ausstattung, wenn sich bei der Grunderwerbung der qm auf 5,9 *M*, bei der cylindrischen Einfassung, gleichwie bei der Eindachung auf 6,4 *M* berechnet?

2) Wieviel Liter Flüssigkeit faßt ein 1,66 m tiefer vierseitiger Kübel in Form eines regulären Pyramidenstumpfes, wenn jede Seite oben im Lichten 1 m, unten aber 1,33 m lang ist?

e) **Im Jahre 1892.** 1) Ein Küfer soll einen 2,66 m tiefen cylindrischen Bottich anfertigen, der 350 hl fassen soll. Welchen Durchmesser im Lichten muß dieser Bottich erhalten?

2) Ein egal ringförmiges Stück Metall von 25 cm großem und 6 cm 3 mm kleinem Radius soll in eine kreisrunde Scheibe von derselben Stärke umgeschmolzen werden. Wie groß muß der Radius zur Gußform genommen werden?

2) In Niederbayern.

a) **Im Jahre 1888.** 1) Ein Feld in Gestalt eines Trapezoids, dessen Diagonale als die Grundlinie eines gleichseitigen und eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreieckes angesehen werden kann, welch' letzteres 341,4 m Umfang hat und den rechten Winkel der Grundlinie gegenüber hat, wird gegen einen kreisrunden Weiher eingetauscht, dessen Umfang 214 m größer ist, als der Durchmesser. In welchem Wertverhältnis steht das a bei beiden Grundstücken?

2) In eine Kugel von 84,78 qcm Oberfläche ist ein Würfel eingeschrieben; wie groß ist der Kubikinhalt desselben?

b) **Im Jahre 1889.** 1) Die Seiten eines ungleichseitigen Dreieckes messen 4, 5 und 7 m. Sein Inhalt ist gleich dem eines gleichschenkligen, dessen Grundlinie auch 7 m lang ist. Ein Schenkel desselben hat gleiche Länge mit der Höhe eines gleichseitigen Dreieckes; daher sind Seite und Inhalt des letzteren wie groß?

2) Ein Stadtthor ist mit 2 Pfeilern geziert; jeder hat die Form eines Cylinders mit $7^1/_2$ dm Durchmesser, geht dann unter einem

Winkel von 45° in einen Kegel über und trägt auf der Spitze des Kegels eine Kugel mit $22^1/_2$ cm großem Radius. Auf diese Weise hat jeder Pfeiler einschließlich seiner Kugel eine Höhe von $4^1/_2$ m. Es fragt sich nun, welcher Flächeninhalt inbetracht kommt, da die beiden Pfeiler angestrichen werden müssen?

c) **Im Jahre 1891.** 1) Ein Gutsbesitzer hat in einer benachbarten Flur 3 auseinanderliegende Waldparzellen; die eine bildet ein Rechteck 96 a groß, die zweite eine Raute und die dritte ein Dreieck. Die Länge des Rechteckes verhält sich zu der längeren Diagonale der Raute wie 3 : 5 und diese Diagonale zu der Grundlinie des Dreieckes wie 10 : 7; desgleichen verhält sich die Höhe des Rechteckes zu dessen Grundlinie wie sie (die Höhe des Rechteckes) sich zu der kürzeren Diagonale der Raute, oder wie diese Diagonale zu der Höhe des Dreieckes sich verhält, nämlich jedesmal wie 2 : 3. Wenn nun der Gutsbesitzer diese 3 Parzellen durch Tausch und Kauf zu einem Areal von der Länge des Rechteckes vereinigen will, wie breit wird diese Waldfläche?

2) In einer Kirchenmauer befindet sich eine Nische; ihre Grundfläche hat die Form eines Halbkreises mit 3,084 m Umfang; 2,3 m über der Grundfläche wölbt sie sich zu einer Viertelshohlkugel; welchen Kubikinhalt hat die Nische?

d) **Im Jahre 1892.** 1) Jemand hat zur Anlegung eines kreisrunden Rasenplatzes von 2,2 m Radius 1 ℔ Grassamen gebraucht. Sein Nachbar hat in derseben Weise 2 Flächen mit Gras besäet, nämlich ebenfalls eine kreisförmige und eine dreieckige, bei der Grundlinie und Höhe einen R einschließen; Halbmesser und Grundlinie sind bei beiden Flächen gleich; jede erforderte 4 ℔ Grassamen; welche von beiden hat einen größern Umfang?

2) Ein cylindrisches, hohles, oben offenes Gefäß von $^1/_4$ m Höhe schließt ein Volumen von 75438,5 ccm ein und ist über das Gefäß hinaus kegelförmig mit Getreide gefüllt, so daß es im ganzen 84,49112 l faßt; wie groß ist die Höhe dieses Kegels?

3) In der Rheinpfalz.

a) **Im Jahre 1888.** 1) Der Fußboden eines Zimmers hat 40,60 qm, die eine Seitenwand 24,50 und die andere an diese anstoßende 20,38 qm Oberfläche. Wie lang, breit und hoch ist das Zimmer?

2) Der Umfang der Grundfläche eines Kegels ist um 17,12 cm größer als die Seitenlinie. Der Mantel beträgt 100,48 qcm. Wie groß ist der Durchmesser des Kegels? Wie groß sein Inhalt? Was wiegt bei einem spez. Gewichte von 6,75 der Abfall, wenn aus diesem Kegel die größtmögliche sechsseitige reguläre Pyramide gemacht wird?

b) Im Jahre 1889. 1) Ein rechteckiger Garten ist 18 m lang und 12 m breit. Um den Garten ist ein überall gleichbreiter Wassergraben gezogen. Die Fläche des Grabens ist um 185 qm kleiner, als die des Gartens. Wie breit ist der Graben?

2) Die 3 Seiten eines Dreieckes messen 30, 40 und 50 cm. **a)** Wie groß ist sein Inhalt? **b)** Wie groß sind die zu den drei Seiten gehörigen Höhen? **c)** Wie groß sind die Schenkel jenes gleichschenkligen Dreieckes, in welches sich das gegebene Dreieck unter Beibehaltung der 50 cm langen Seite als Basis verwandeln läßt? **d)** Wie groß sind Seite und Höhe jenes gleichseitigen Dreieckes, das den gleichen Inhalt hat wie das ursprünglich gegebene Dreieck? **e)** Wie groß ist die Differenz der beiden Kreise, die man dem letzterwähnten gleichseitigen Dreieck ein- und umschreiben kann?

3) Die quadratische Grundfläche eines senkrechten Prismas enthält 1764 qcm, und die Diagonale eines Seitenrechteckes mißt $79\frac{1}{2}$ cm. **a)** Wie lang ist eine Seite der Basis? **b)** Wie hoch ist das Prisma? **c)** Wie groß ist seine Oberfläche? **d)** Wie hoch müßte ein Prisma mit rechteckiger Grundfläche sein, welches mit jenem gleiche Basis und Oberfläche haben soll, wenn sich seine Grundkanten wie 16 : 9 verhalten?

c) Im Jahre 1891. 1) In einen Kreis mit einem Radius von 18 cm wird ein regelmäßiges Drei-, Sechs- und Zwölfeck geschrieben **a)** Welches sind die Umfänge und Inhalte dieser Figuren? und **b)** in welchem Verhältnis stehen die 4 je gleichartigen Größen?

2) In einem Garten sollen 2 elliptische Beete angelegt werden, von denen das erste 5306,6 qdm, das zweite aber 148,365 qm messen soll. Wie groß sind die Ellipsenachsen zu nehmen, wenn sich dieselben bei der ersten Figur wie 5 : 8, bei der zweiten aber wie 7 : 12 verhalten sollen? Mit welchem Radius läßt sich jenem gleichseitigen Dreiecke, das so groß ist, als die Summe dieser beiden Ellipsen, ein Kreis einschreiben?

3) Wie groß sind Inhalt und Oberfläche eines Kegelstumpfes, dessen Körperhöhe 24 cm, dessen Seitenhöhe 25 cm und dessen Deck-

flächenradius 5 cm mißt? In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der beiden Abschnitte zu einander, wenn dieser Kegelstumpf in einer Höhe von 15 cm parallel zur Grundfläche geschnitten wird?

d) Im Jahre 1892. 1) Wenn man ein Zweimarkstück auf ein silbernes Fünfmarkstück konzentrisch legt, so bleibt ein ringförmiger Oberflächenteil der letzteren Münze unbedeckt. Wie groß ist dieser Kreisring, wenn der Umfang des Fünfmarkstückes 119,82 mm und der Durchmesser des Zweimarkstückes 28 mm ist? Wie groß ist die Oberfläche des Fünfmarkstückes bei einer Dicke von 3 mm?

2) Aus einem Bleikegel von 38 cm Durchmesser der Grundfläche und 96 cm Mantelhöhe soll eine Röhre gegossen werden, die eine lichte Weite von $3^1/_2$ cm und eine Wandstärke von $1^1/_2$ cm hat; wie lang wird die Röhre? ($\pi = 3^1/_7$).

4) In der Oberpfalz.

a) Im Jahre 1888. 1) 2 Seiten eines Dreieckes sind 15 m und 20 m lang; die von ihrem Vereinigungspunkte auf die dritte Seite gezogene Höhe mißt 12 m. Wie groß ist der Inhalt dieses Dreieckes?

2) Ein gleichseitiger Kegel hat eine Höhe von 3,46 cm. Wie groß ist die Kante eines inhaltsgleichen Würfels?

3) Ein kreisrundes Bassin von 12,5 m Durchmesser und 2,5 m Tiefe soll mit Backsteinen ausgemauert werden. Wieviel Steine à 75 cm äußerer Breite und 5 cm Dicke (Höhe) sind hiezu erforderlich?

b) Im Jahre 1889. 1) Ein gleichschenkliges Dreieck hat 182 qcm Inhalt. Die Summe von Grundlinie und Höhe beträgt 40 cm. Wieviel mißt **a)** Grundlinie, **b)** Höhe, **c)** Schenkel.

2) An einem senkrechten Cylinder mißt die Höhe um 20 cm mehr, als der Radius; die Oberfläche dieses Cylinders beträgt 7536 qcm. Wie groß ist der Radius, die Höhe, der Inhalt?

3) Die Oberfläche eines geraden Kegelstumpfes beträgt 536,94 qm, der Mantel desselben 345,4 qm, die Seitenlinie 10 m. Zu suchen die Radien der Grundflächen!

4) Entwickelung der Formel für das Volumen des senkrechten Pyramidenstumpfes, wenn gegeben sind die Höhe des Stumpfes und die beiden Grundflächen!

c) **Im Jahre 1891.** 1) Der Umfang eines Rechteckes von 40,56 qm Inhalt ist um 18,2 m größer, als die Grundlinie; wie groß sind die Seiten?

2) Der Mantel eines geraden Kegels bildet abgewickelt einen Kreissektor, dessen Zentriwinkel 216° und dessen Fläche 188,4 qcm beträgt; wie groß ist Inhalt und Oberfläche dieses Kegels?

3) An einem Kegelstumpfe von 299 719,28 ccm Inhalt mißt die Höhe 84 und die Seitenlinie 85 cm, wie groß sind die Radien der Grundflächen?

4) Wie groß muß der Halbmesser einer Kugel sein, damit sie dieselbe Oberfläche erhält, wie 2 andere Kugeln zusammen, von denen die eine einen Halbmesser von 4,5 m und die andere einen größten Umfang von 15,7 m hat?

5) Zu entwickeln die Formel für den Inhalt des Pyramidenstumpfes, wenn gegeben sind die Grundfläche F, die Schnittfläche f und die Höhe h!

d) **Im Jahre 1892.** 1) Eine a = 80 cm hohe Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck von b = 12 cm Seitenlänge ist, wird in halber Höhe parallel zur Grundlinie durchschnitten. Wie groß ist **a)** die Oberfläche des Stumpfes, **b)** der Kubikinhalt der Ergänzungspyramide?

2) Ein Fruchtmaß von der Form eines Kegelstumpfes soll ein Doppelhektoliter fassen. Der Radius der Grundfläche R wird zu 0,50 m, der Radius der Schnittfläche r zu 0,30 m genommen. Wie groß muß die Seitenlinie s dieses Gefäßes im Lichten sein? (Die anzuwendende Formel ist vorher zu entwickeln. Dezimalen und Wurzeln sind mit 3 Stellen zu nehmen).

5) In Oberfranken.

a) **Im Jahre 1886.** 1) Aus einem Baumstamm, dessen Endflächen einen Umfang von 11,304 und 7,536 m besitzen und dessen Seitenlinie 12,015 m mißt, soll ein viereckiger Balken von gleicher Länge geschnitten werden, und zwar sollen die Quadrate, welche sich in die Grundflächen des Stammes einschreiben lassen, die beiden Grundflächen des Balkens werden. Wieviel beträgt der Abfall an Holz?

2) In ein Rechteck, dessen Seiten sich wie 3 : 5 verhalten und das einen Inhalt von 183,75 qcm besitzt, ist ein gleichschenkliges Dreieck

gelegt, dessen Basis der längeren Rechteckseite entspricht, während die zur Basis gehörige Höhe der kürzeren Seite des Rechteckes gleichkommt. Wenn nun in dieses Dreieck und um das Rechteck ein Kreis beschrieben wird, wie groß ist dann der Unterschied im Inhalt beider Kreise?

b) **Im Jahre 1888.** 1) Die Oberfläche eines sechsseitigen Pyramidenstumpfes mit regulären Grundflächen beträgt 2302,5 qcm, die Kanten der Boden- und Deckfläche messen 15, bez. 5 cm. Wie groß ist der Inhalt? (Die Formel zur Inhaltsberechnung eines Pyramidenstumpfes ist zu entwickeln!)

2) Die Oberfläche eines geraden Kegels, dessen Grundfläche einen 5 cm langen Radius besitzt, beträgt 282,60 qcm. Wie groß ist der Inhalt?

c) **Im Jahre 1889.** Die Summe der ersten und zweiten Seite eines Dreieckes beträgt 28 cm, die der ersten und dritten 24 cm, die der zweiten und dritten 20 cm. **a)** Welches ist der Inhalt dieses Dreieckes? **b)** Welches Volumen besitzt ein gerader Kegel, der sich aus einer Kugel von 2571,14 ccm Inhalt ausschneiden läßt, wenn die Spitze des Kegels im Mittelpunkte der Kugel liegt, und die Basis desselben dem in das obige Dreieck beschriebenen Kreise entspricht?

d) **Im Jahre 1890.** 1) Einem Kegel, dessen Seitenlinie gleich dem Durchmesser ist, ist eine Kugel so eingeschrieben, daß sie die Basis und die Mantelfläche des Kegels berührt; der Kugel ist ein Zylinder einbeschrieben, bei dem Höhe und Durchmesser gleich sind. Wenn nun der Mantel des Kegels 117,7431 qcm beträgt, welchen Inhalt haben dann die 3 Körper?

2) In die untere Grundfläche eines Würfels von 13,824 ccm Inhalt ist ein Kreis beschrieben und auf demselben ein gerader Kegel errichtet, dessen Höhe 5 mal so groß ist, als der Halbmesser der Grundfläche. Wie groß ist der Kegelstumpf, der zwischen den Grundflächen des Würfels liegt?

e) **Im Jahre 1891.** 1) Eine Dachfläche hat die Form eines gleichschenkligen Trapezes; die größere Parallele mißt 20 m, die Diagonale 18,5 m, die nicht parallele Seite 6,5 m. Das Dach soll mit quadratischen Ziegeln von 25 cm Seite gedeckt werden. Wie viele Stücke sind notwendig, wenn 25 % der Fläche mehr gerechnet werden muß?

2) Wie groß ist der Kubikinhalt eines abgekürzten Kegels, dessen Oberfläche 967,12 qcm beträgt, wenn der Unterschied zwischen den

Halbmessern der Grund- und Deckfläche 8 cm und zwischen der Seitenlinie und Höhe 2 cm ausmacht?

f) **Im Jahre 1892.** 1) Die Grundlinie eines Rhomboides beträgt 21 m, die anstoßende Seite 10 m und eine Diagonale 17 m. Wie groß ist der Inhalt?

2) Eine konzentrische Kugelschale ist 4 cm dick; ein ebener Schnitt, welcher durch die äußere Kugel geht und die innere berührt, hat einen Halbmesser von 12 cm. **a)** Welches Volumen hat die Hohlkugel? **b)** Welchen Inhalt hat das kleine Kugelsegment, das durch die genannte Ebene an der äußeren Kugel abgeschnitten wird?

6) In Mittelfranken.

a) **Im Jahre 1888.** 1) Ein Garten besitzt die Form eines Trapezes, dessen Parallelseiten 70 m und 44 m lang sind und deren senkrechte Entfernung 40 m beträgt. Wenn jene 2 Eckpunkte, die am weitesten voneinander entfernt liegen, durch einen 73 m langen Weg verbunden sind, welchen Umfang hat dieser Garten?

2) Welchen Kubikinhalt hat ein Kegel, wenn die in eine Ebene ausgebreitete Mantelfläche einen Kreissektor bildet, dessen Zentriwinkel 90° mißt und dessen Halbmesser 32 cm lang ist?

b) **Im Jahre 1889.** 1) Die Seiten eines ungleichseitigen Dreieckes messen 140 m, 100 m und 80 m; wie lang sind die von den Eckpunkten des Dreieckes auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Höhenperpendikel?

2) Welches ist das absolute Gewicht einer geraden, sechsseitigen prismatischen Säule von Granit, wenn jede Seitenkante derselben 14,4 m mißt, Grund- und Seitenkanten im Verhältnisse von 1 : 20 stehen, die Basis ein reguläres Sechseck bildet und das spez. Gewicht des Granits = 2,40 ist?

c) **Im Jahre 1890.** 1) Eine trapezoidische Fläche besitzt 30 m, 29 m, 36 m und 43 m lange Seiten, während die kleine Diagonale der Figur 41 m mißt. Welchen Umfang hat ein inhaltsgleiches, gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis der längsten Umfangsseite des Trapezoides gleichkommt?

2) Eine 10 m lange und 1,4 m dicke cylinderförmige Säule aus Marmor bricht entzwei, so daß die Bruchfläche zwar eben ist, aber die Achse schief durchschneidet. Wenn die kürzere Seitenlinie des größeren

Bruchstückes 7 m und die längere Seitenlinie desselben 8 m mißt, wie schwer ist ein jedes dieser Bruchstücke, das spez. Gewicht des Marmors zu 2,5 angenommen?

d) **Im Jahre 1891.** 1) Die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes mißt 2,4 m, die Höhe zur Hypotenuse 1,8 m. Zum Dreieck wird der umschriebene Halbkreis konstruiert und es soll nun die Summe der Segmentflächen über den Katheten berechnet werden.

2) Durch eine Kugel mit einem 60 cm langen Durchmesser werden 18 cm links und 15 cm rechts vom Kugelzentrum entfernt parallele Ebenen gelegt. Welchen Inhalt besitzt der zwischen diesen Ebenen sich befindliche Zonenabschnitt?

e) **Im Jahre 1892.** 1) Ein Dreieck besitzt 30 m, 52 m und 60 m lange Seiten. In welche zwei Teile wird dieses Dreieck durch das zur längsten Seite gehörige Höhenperpendikel zerlegt?

2) Aus einer Kugel vom Radius = 5 cm ist ein cylindrischer Kern herausgebohrt, dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Wie groß ist die Oberfläche und der Kubikinhalt des herausgebohrten Kernes, wenn der Radius seines Querschnittes = 3 cm ist?

f) **Im Jahre 1895.** 1) Ein Trapez besitzt einen Umfang von 100 m. Welches ist der Inhalt des Viereckes, wenn die Parallelseiten desselben 42 m und 24 m messen und eine der Nichtparallelen 15 m lang ist?

2) Der Achsenschnitt eines Kegels ist ein reguläres Dreieck mit 2,8 m langen Seiten. **a**) Wie groß ist das Volumen und die Oberfläche des Kegels? **b**) Welche Oberfläche besitzt eine inhaltsgleiche Kugel?

7) In Unterfranken.

a) **Im Jahre 1887.** 1) In der Ecke eines Gartens, der ein Rechteck bildet und 43 m lang und 26 m breit ist, soll ein Gartenhaus mit einer quadratischen Grundfläche von 74 qm erbaut, in der Mitte des Gartens aber ein Bassin von 5,6 m Durchmesser angebracht werden. Wievielmal ist die Länge des Gartens größer, als die des Hauses und wieviel qm Fläche bleiben zur Bebauung des Gartens, wenn 96,5 qm für Wege in Abrechnung kommen?

2) Ein Eisenbahnpackwagen hat eine Tragkraft von 10 000 kg. Wie viele 6 cm dicke und 3 m lange runde Eisenstäbe (spez. Gewicht 7,2) kann man aufladen?

3) Eine 8,7 m hohe, vierseitige Pyramide hat einen Inhalt von 139,2 cbm. Wie groß sind die Seiten der rechtwinkligen Grundfläche, wenn sich dieselben wie 1 : $1^1/_3$ verhalten?

b) **Im Jahre 1888.** 1) Ein Stück Land in Form eines Paralleltrapezes, welches an einer Seite 65 m lang und 40 m breit ist, wird verkauft per a 48 *M.* Der Kaufpreis ist nach 1 Jahr ohne Zinsen zu bezahlen. Der Verkäufer bietet bei Barzahlung 5% Rabatt; wie berechnet sich diese Barzahlung?

2) Ein Kegel hat einen unteren Umfang von 25,12 cm und eine Seitenlinie von 14 cm. Wie hoch ist er und wie groß ist der Mantel?

c) **Im Jahre 1889.** 1) Ein Kegelstumpf, bei welchem die Radien der Endflächen 18 und 10 cm betragen, hat ein Volumen von 9482 ccm und 800 cmm. **a)** Welche Höhe hat der Kegelstumpf? **b)** Wie viele cm mißt die Seitenlinie? **c)** Wie viele qcm entziffert der Mantel? **d)** Wie groß ist die Gesamtoberfläche? **e)** Wie hoch ist der Kegel, von welchem der Stumpf ein Teil ist?

2) Um ein Quadrat von 1,44 qm Fläche wird ein Kreis gelegt und in diesem ein reguläres Achteck beschrieben. Um wieviel differiert der Umfang des Kreises von dem des Achteckes? (Der Radius des Kreises ist auf 2 Dezimalstellen zu ermitteln.)

3) Die geraden Wege vom Orte A nach B und von A nach C bilden einen rechten Winkel, so daß A im Scheitelpunkte desselben liegt. Wenn nun von A nach C 405 m und von A über B nach C 810 m weit ist, welche Länge hat der Weg von A nach B und welche der von B nach C?

d) **Im Jahre 1890.** 1) Ein Kegel und eine reguläre sechsseitige Pyramide haben gleichen kubischen Inhalt, nämlich 1570 cbm und gleiche Höhe, nämlich 15 m. Wie verhalten sich die Umfänge ihrer Grundflächen?

2) Ein Eisenbahndamm ist oben 5,3 m breit und die Höhe beträgt 6,4 m, sein Böschungswinkel mißt 60°. Welchen kubischen Inhalt hat das laufende Meter dieses Dammes?

e) **Im Jahre 1891.** 1) Wie groß ist der Radius desjenigen Kreises, der um die Grundfläche einer quadratischen Pyramide so gelegt wird, daß die Ecken in die Peripherie fallen? Der Inhalt der Pyramide hat 1632 ccm; die Höhe mißt 64 cm. (3 Decimalstellen.)

2) Ein Denkmal besteht aus einem würfelförmigen Fuß von 1,5 m Kante, einer abgekürzten quadratischen Pyramide, welche unten 1,2 m, oben 0,48 m Seite und 8,4 m Höhe hat, und oben aus einer Pyramide von 2 dm Höhe. Wie schwer wiegt es, wenn es aus Granit gefertigt ist, dessen spez. Gewicht 2,7 beträgt?

f) **Im Jahre 1892.** 1) Ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten 2,1 cm und 7,2 cm lang sind, wird um die größere Kathete als Achse gedreht. Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des entstandenen Kegels?

2) Die Flüssigkeit in einem kegelförmigen Gefäße von 8,4 cm Durchmesser und 5,4 cm Höhe soll in ein cylindrisches Gefäß von 4,6 cm Durchmesser gegossen werden; bis zu welcher Höhe wird die Flüssigkeit reichen?

8) In Schwaben.

a) **Im Jahre 1886.** 1) Ein 7794 qm großer Platz hat die Form eines regulären Dreieckes; es soll: a) die Seite, b) die Höhe des Dreieckes berechnet werden!

2) Der Zentriwinkel eines Sektors hat 60°, während der Durchmesser des zugehörigen Kreises 14 cm ist. Wie groß ist hiernach der Inhalt des Sektors?

3) Ein Holzhaufen, welcher 6 m lang, 4 m breit und 1,75 m hoch ist, soll auf einen 8 m langen und 2 m breiten Raum gesetzt werden. Welche Höhe muß nun der Holzhaufen erhalten?

4) Ein 15 m hoher Kegel hat zur Grundfläche eine Ellipse, deren Achsen 7 und 4 m betragen. Wie groß ist sein Kubikinhalt?

5) Ein kreisrunder Bottich von $1^1/_4$ m Tiefe hat Enddurchmesser von 1,40 und 1,26 m. Wieviel hl kann er fassen?

b) **Im Jahre 1888.** 1) Um ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a = 4 cm soll ein Kreis beschrieben werden. Wie groß ist der Radius desselben?

2) Eine abgekürzte, regelmäßige Pyramide von 15,6 m Höhe hat einen Kubikinhalt von 353,392 cbm. Wie groß ist die Seite der größeren Basis, wenn die der kleineren 3,4 m mißt?

c) **Im Jahre 1890.** 1) Die Grundfläche einer 1,5 m hohen geraden Pyramide bildet ein Quadrat von 60 cm Seitenlänge. In welcher Entfernung von der Spitze ist eine mit der Grundfläche parallele Ebene hindurchzulegen, um den Inhalt der Pyramide zu halbieren?

2) Ein Brunnen von 8,5 m Tiefe und 1,8 m Durchmesser soll ausgemauert werden. Wie viele cbm Mauerwerk gehören dazu, wenn der Durchmesser im Lichten 1,2 m lang wird?

d) **Im Jahre 1891.** 1) Der Inhalt einer 8,7 m hohen vierseitigen Pyramide beträgt 139,2 cbm. Wie groß sind die Seiten der rechtwinkeligen Grundfläche, wenn sich dieselben wie 1 : $1^1/_3$ verhalten?

2) Eine hohle Kugel von 204,1 cm äußerem Umfang und 0,5 cm Wandstärke wird mit Wasser gefüllt. Wieviel l Wasser braucht man dazu?

e) **Im Jahre 1892.** 1) Eine rechteckige Wiese ist 48 m lang und 32 m breit. Um dieselbe wird ein überall gleichbreiter Wassergraben gezogen, dessen Oberfläche gerade so groß ist, als die der Wiese. Wie breit muß der Wassergraben werden?

2) Ein gleichseitiger Kegel hat 624 qm Oberfläche. Wie groß sind Durchmesser, Höhe und Inhalt?

II. Gegeben bei der Absolutorialprüfung an bayerischen Gymnasien.

1) **Im Jahre 1861.** 1) Durch einen Punkt der Peripherie eines Kreises ist eine Tangente gezogen und soweit verlängert, bis sie von einer verlängerten Sehne (Sekante) dieses Kreises geschnitten wird; welche Proportion ergibt sich aus dieser Konstruktion und warum?

2) Die Summe zweier Kantenwinkel eines körperlichen Dreieckes (eines dreiseitigen, körperlichen Winkels) ist größer, als der dritte Kantenwinkel. Beweis.

2) **Im Jahre 1862.** 1) In welchem Größenverhältnisse stehen Zentri- und Peripheriewinkel, welche beide auf dem nämlichen Bogen aufstehen und warum?

2) In einer abgekürzten Pyramide sind die beiden Begrenzungsflächen G und g und der Abstand dieser beiden Ebenen voneinander = a gegeben; man soll den Ausdruck herleiten, der den kubischen Inhalt dieses Körpers angibt.

3) **Im Jahre 1863.** 1) Es soll bewiesen werden, daß 2 Dreiecke ähnlich seien, wenn in denselben ein Paar Winkel gleich und die Seitenpaare, welche diese Winkel einschließen, proportional seien.

2) Jedes dreiseitige Prisma kann in 3 gleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt werden.

4) **Im Jahre 1864.** 1) Wird durch einen Punkt in der Peripherie eines Kreises eine Tangente und eine Sehne gezogen, so ist der von diesen Linien gebildete Winkel jenem Peripheriewinkel gleich, welcher auf dem zwischen den Linien liegenden Bogen aufsteht.

2) Werden 2 parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so bilden sie mit dieser nach jeder Seite hin gleiche Flächenwinkel.

5) **Im Jahre 1865.** Ein Rechteck zu zeichnen, dessen Umfang einer gegebenen Geraden $= 2\,p$ und dessen Inhalt einem gegebenen Quadrate $= q^2$ gleich ist.

6) **Im Jahre 1866.** 1) Ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck zu zeichnen, dessen Umfang einer gegebenen Geraden gleich ist.

2) Den Flächeninhalt des Mantels eines geraden Kegels zu berechnen, wenn der Radius der Grundfläche $= r$ und die Höhe des Kegels $= h$ gegeben sind.

7) **Im Jahre 1867.** 1) Es ist ein Quadrat gegeben; es ist ein Rechteck zu konstruieren, welches den nämlichen Inhalt, aber einen doppelt so großen Umfang hat als das gegebene Quadrat.

2) Eine Pyramide wird von einer zur Grundfläche parallelen Ebene geschnitten; wie verhält sich die Durchschnittsfigur sowohl rücksichtlich ihrer Form als ihrer Größe zur Grundfläche und warum?

8) **Im Jahre 1868.** 1) An einem Trapez sind die zwei nicht parallelen Seiten halbiert und die Halbierungspunkte durch eine Gerade verbunden; welche Behauptungen gelten von dieser Geraden? Beweis.

2) Eine Gerade ist nach stetiger Proportion (mittl. und äußer. Verhältnis) geteilt und der größere Abschnitt $= a$ gegeben; bestimme und konstruiere diese Gerade.

9) **Im Jahre 1869.** Bestimme den Radius und die Höhe eines geraden Kegels, welcher 14,51044 c' hält und dessen Mantel doppelt so groß als die Grundfläche ist.

10) **Im Jahre 1870.** 1) Die reguläre Sechseck-Seite ist gleich r und die reguläre Zwölfeck-Seite $= r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; beweise das erstere und leite den letzteren Ausdruck ab.

2) In einen gegebenen Kreis ein Rechteck zu beschreiben, dessen Umfang gleich einer gegebenen Geraden ist.

11) **Im Jahre 1871.** 1) Eigenschaften des Parallelepipeds bezüglich der Grundflächen, Seitenflächen und Flächenwinkel?

2) Welche Forderungen ergeben sich, wenn man im rechtwinkeligen Dreieck vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse die Senkrechte fällt?

12) **Im Jahre 1872.** 1) In einem Dreieck ist ein Winkel halbiert und die halbierende Linie bis zum Durchschnitt verlängert; welche Beziehung besteht zwischen den Abschnitten dieser Seite und den anliegenden Dreieckseiten? Beweis.

2) Ein Rechteck zu konstruieren, welches halb so groß als ein gegebenes Quadrat ist und mit diesem gleichen Umfang hat.

13) **Im Jahre 1874.** 1) Zieht man in einem n=Eck alle Diagonalen, so schneiden sich je 2 derselben in einer Ecke oder anderswo; wie viele Schnittpunkte der letzteren Art sind vorhanden?

2) Die Fußpunkte der Höhen eines gegebenen Dreieckes sind selbst die Ecken eines Dreieckes, das den gemeinschaftlichen Schnittpunkt der Höhen des gegebenen Dreieckes zum Mittelpunkt seines eingeschriebenen Kreises hat. Zu beweisen.

14) **Im Jahre 1875.** 1) Ein gegebenes Trapez soll durch eine zur Grundlinie parallele Gerade halbiert werden.

2) Von einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide beträgt die Oberfläche a qcm, der Kubikinhalt b ccm; wie groß ist eine Kante der Grundfläche und eine Kante der Seitenfläche?

15) **Im Jahre 1876.** Ein Dreieck mit den Seiten $a = 41$ cm, $b = 29$ cm, $c = 21$ cm dreht sich um seine größte Seite; wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des entstehenden Doppelkegels?

16) **Im Jahre 1877.** 1) Die Geraden AB und CD stehen auf der Geraden AC senkrecht und die Endpunkte B und D liegen auf derselben Seite von AC; $AB = 1$ m ist die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes und $CD = 1^5/_6$ m der Radius eines Kreises mit dem Mittelpunkte D; wie weit steht der gemeinsame Schwerpunkt beider Figuren von dem Punkte D ab, wenn $AC = 4$ m ist?

2) In 2 Dreiecken ABC und abc verhalten sich die Seiten AB und ab wie die Radien der den Dreiecken umschriebenen Kreise; außerdem ist $\sphericalangle BAC = bac$. Wie verhalten sich die beiden Seiten AC und ac beider Dreiecke, und welche Eigenschaft der Dreiecke folgt hieraus?

17) **Im Jahre 1878.** 1) Um eine Kugel, deren Halbmesser $= a = 1$ m ist, ist ein abgekürzter Kegel beschrieben, d. h. die Kugel wird von der Grundfläche, Deckfläche und Mantelfläche des abgekürzten

Kegels berührt. Die Summe dieser 3 Flächen beträgt das **n** (= 2)-fache von der Oberfläche der Kugel. Wie groß sind die **Halbmesser** von der Grund- und Deckfläche des abgekürzten Kegels und **wie verhält** sich sein Kubikinhalt zu dem der Kugel?

18) **Im Jahre 1879.** 1) Ein Dreieck soll durch eine zur Seite AB Parallele im Verhältnisse von 2 : 3 geteilt werden.

2) Einem Würfel, dessen Kante a (= 2) m mißt, ist eine Kugel umbeschrieben. a) Um wieviel unterscheiden sich die Oberflächen und Volumina beider Körper? b) Welche Neigung hat der Kugeldurchmesser in der Diagonalebene zur Kante des Würfels?

19) **Im Jahre 1880.** 1) In einen Quadranten soll ein Kreis so gezeichnet werden, daß derselbe die beiden den Quadranten begrenzenden Halbmesser und den Bogen berührt.

2) Die Summe der Inhalte zweier regelmäßiger Tetraeder beträgt 15,6742 cbm, die Summe zweier Kanten derselben 7 m; wie groß ist die Kante eines jeden?

3) Es soll bewiesen werden, daß sich die Fläche der zwei ähnlichen Dreiecken einbeschriebenen Kreise verhalten, wie die Flächen der Dreiecke.

20) **Im Jahre 1881.** 1) In einem rechtwinkligen Parallelepipedon beträgt die Summe aus Länge, Breite und Höhe 39 cm, die Summe ihrer Quadrate 741 qcm, und die Länge ist das geometrische Mittel aus der Breite und Höhe. Wie groß ist jede Kante, die Oberfläche und das Volumen?

2) Von einem Kreissektor ist der Umfang = 17 cm, der Inhalt = 17,5 qcm; wie groß ist die Sehne, welche die Endpunkte der Grenzradien verbindet?

21) **Im Jahre 1882.** 1) Die Gesamtoberfläche eines kegelförmigen Kugelsektors beträgt $1/4$ der Kugeloberfläche; wie groß ist der Inhalt des Sektors und wie verhält sich derselbe zu dem der Kugel? (Gegeben der Radius der Kugel = r.)

2) In einen gegebenen Kreis ist ein konzentrischer Kreis so einzubeschreiben, daß die Sehnen des größeren Kreises, welche den kleineren berühren, um a kleiner sind, als der Durchmesser des kleineren Kreises.

22) **Im Jahre 1884.** 1) Ein reguläres Oktaëder hat einen Liter Inhalt. Wie groß ist die Kante und die Oberfläche?

2) Von den Ecken A und B eines gegebenen Dreieckes ABC sind zwei Kreise konstruiert, welche sich in der Ecke C schneiden. Durch C

soll eine Gerade so gezogen werden, daß sie aus beiden Kreisen gleiche Sehnen ausscheidet. Wie groß ist diese Sehne?

23) **Im Jahre 1885.** In einen gegebenen Kreis mit dem Radius r soll — sei es durch direkte Zeichnung, sei es durch Berechnung mit nachfolgender Konstruktion — ein Rechteck einbeschrieben werden, von welchem die Differenz zweier anstoßender Seiten = d gegeben ist.

24) **Im Jahre 1886.** Ein Dreieck soll durch eine Parallele zu einer Seite so geteilt werden, daß sich der obere Teil zum ganzen Dreieck verhält wie 2 : 3.

25) **Im Jahre 1888.** In einen gegebenen Kreissektor ist ein Kreis zu zeichnen, der die beiden Grenzradien und den Bogen des Sektors berührt.

III. Aufgaben aus der Algebra und Geometrie, welche bei Seminaraustrittsprüfungen in Bayern gegeben wurden.

1) In Oberbayern.

a) **Im Jahre 1891.** 1) Von 2 Kapitalien geben $^1/_4$ des ersteren zu $4^0/_0$ in 3 Jahren und $^3/_5$ des zweiten zu $5^0/_0$ in 2 Jahren zusammen 198 ℳ Zinsen. Der Rest des ersteren Kapitals zu $3^0/_0$ in 5 Jahren und der Rest des zweiten zu $6^0/_0$ in 4 Jahren geben zusammen 420 ℳ Zinsen. Wie groß ist jedes der beiden Kapitalien?

2) An einem Baue, der in 3 Wochen vollendet wurde und 450 ℳ gekostet hat, arbeiteten in der ersten Woche 2 Gesellen, 9 Arbeiter und 4 Handlanger, in der zweiten 4 Gesellen, 11 Arbeiter und 3 Handlanger, in der dritten 3 Gesellen, 10 Arbeiter und 5 Handlanger. Es wurden in der zweiten Woche dafür 36 ℳ mehr verausgabt, als in der ersten, in der dritten 9 ℳ weniger, als in der zweiten. Wie groß war der Taglohn eines Gesellen, eines Arbeiters und eines Handlangers?

3) Ein Brunnentrog aus Sandstein ist innen 2 m lang, 1,2 m breit und 90 cm hoch; die Dicke des Steines beträgt gleichmäßig 0,1 m. a) Wie viele l Wasser faßt der Trog? b) Welche Oberfläche hat das Innere des Troges? c) Wie groß ist das Gewicht der Steinmasse? (Spez. Gew. = 2,6.)

4) Ein senkrechter Cylinder von 5 cm Radius und 20 cm Höhe soll durch Abschleifen in das größtmögliche, reguläre, sechsseitige Prisma verwandelt werden. Wieviel Masse geht verloren?

2) Niederbayern.

Im Jahre 1886. 1) Um einen Kreis von 3,99 qm Inhalt ist ein Quadrat beschrieben und über einer Seite desselben als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck konstruiert, dessen Schenkel doppelt so lang als die Grundlinie ist. Welchen Inhalt hat das durch das Quadrat und das gleichschenklige Dreieck gebildete Fünfeck?

2) Wie groß ist der Radius einer Kugel, welche einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide mit der Kante 3,288 m inhaltsgleich ist?

3) In der Pfalz.

a) **Im Jahre 1886.** 1) Die Seite eines Kegels von 105,72 qm Oberfläche ist um 4 m größer als der Radius der Grundfläche. Wie groß ist **a**) der Durchmesser der Grundfläche, **b**) die Höhe, **c**) der Mantel, **d**) der Inhalt des Kegels?

2) Ein Obelisk ist aus folgenden Formen aufgebaut: **a**) einer quadratischen Platte von 1,75 m Seite und 0,5 m Dicke; **b**) einem Würfel von 1,25 m Kante; **c**) einer abgestumpften regelmäßigen vierseitigen Pyramide von 10 m Höhe, 5 m unterem und 4 m oberem Umfang; **d**) einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide von 4 m Umfang und 0,25 m Höhe. Welches Volumen hat die ganze Masse?

b) **Im Jahre 1891.** 1) Ein Baumeister verkaufte 2 neue Häuser, das erste brachte ihm 1000 ℳ und das zweite, das ihn nur 100 ℳ mehr zu bauen kostete, 1512 ℳ Reingewinn. Die Bausumme des zweiten Hauses ertrug darum 4% Gewinn mehr, als die des ersten. Welches ist der Baupreis des ersten Hauses und wieviel % Gewinn warf es ab?

2) Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen beträgt 1020. Wenn man jede Zahl um 4 vergrößert, dann ist die Differenz der Quadrate 1100. Welches sind diese beiden Zahlen?

3) In der Mitte eines quadratischen Parkes von 2391,96 a steht eine Eiche, die einen Umfang von 4,396 m hat. Wie weit ist der Baum von einer Ecke und wie weit von einer Seite des Parkes entfernt?

4) Ein gerader Kegel von 12 cm Höhe hat eine Oberfläche von 282,6 qcm. Um wieviel vermindert sich das Volumen desselben, wenn daraus die größtmögliche, reguläre, sechsseitige Pyramide gemacht wird? Wie groß ist die Differenz zwischen den Oberflächen beider Körper?

5) Auf einem Berge wird ein cylindrischer Aussichtsturm von 18,5 m Höhe erbaut. Sein innerer Durchmesser ist 3,6 m und seine Mauerdicke 0,8 m. Wie hoch belaufen sich die Kosten der Fertigstellung, wenn das Kubikmeter Mauerwerk 9,50 ℳ, das Quadratmeter innerer und äußerer Verputzung 0,48 ℳ kostet und für Fundament und Treppe 4,50 ℳ gerechnet werden? ($\pi = 3{,}14$.)

4) In Oberfranken.

a) Im Jahre 1886. 1) Zwei Seiten eines Dreieckes messen 4,95 und 6,5 cm und schließen einen Winkel von 135° ein. Wie groß ist das Segment einer Kugel, die den Durchmesser des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises zum Radius hat, wenn die Höhe der zugehörigen Haube dem Durchmesser des in das Dreieck beschriebenen Kreises entspricht? (Die Formeln zur Berechnung der Radien sind zu entwickeln!)

2) Die Kante der Grundfläche eines regulären dreiseitigen Pyramidenstumpfes von 60,98 qcm Oberfläche mißt 4, die der Deckfläche 1,2 cm. Wie groß ist der Unterschied zwischen dem Inhalte dieses Körpers und dem einer Pyramide, die dieselbe Höhe besitzt und deren Grundfläche so groß als das reguläre Sechseck ist, das sich in den um die Basis des Pyramidenstumpfes gelegten Kreis beschreiben läßt?

b) Im Jahre 1891. 1) Vier Personen, A, B, C und D, vereinigen sich zu einem Geschäfte, und gewinnen mit ihrer Einlage 30 %. C hat um das $^3/_7$ fache der Einlage des B mehr gegeben als A, D aber $^9/_{20}$ mal so viel, als die 3 ersten zusammen. A und C zusammen erhalten vom Gewinn, der im ganzen 696 ℳ beträgt, 312 ℳ. Wieviel gab jede Person zum Geschäfte?

2) Es ist das Volumen einer geraden, regelmäßigen, dreiseitigen Pyramide zu berechnen, wenn der Radius des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises $2\sqrt{3}$ cm und eine Seitenfläche das 4 fache der Grundfläche ist!

3) Zwei rechtwinklige Dreiecke werden mit ihrer gleichen, 7,6 cm langen Hypotenuse so aneinander gelegt, daß sie ein Trapezoid bilden. Wenn nun die eine Kathete des ersten Dreieckes 2,1 cm mißt und die Projektion der einen Kathete des anderen Dreieckes zur Hypotenuse 5,4 cm lang ist, welchen Inhalt hat dann **a)** das Trapezoid? **b)** ein Kegel, dessen Grundfläche dem um das Trapezoid beschriebenen Kreise entspricht und dessen Seitenlinie der größeren Kathete des zweiten Dreieckes gleich ist?

c) Im Jahre 1895. 1) Jemand hat nach einer gewissen Zeit 1500 ℳ und 5 Jahre später 2800 ℳ zu bezahlen. Zahlt er gleich, so braucht er nur 3200 ℳ im ganzen zu entrichten, da ihm für die erste Summe 5, für die zweite 4% Rabatt (auf Hundert) p. a bewilligt werden. Wann waren die Summen zu bezahlen?

2) Der Inhalt eines Dreieckes beträgt 66 qm, 2 Seiten desselben messen 11 m und 13 m. Welchen Inhalt hat das regelmäßige Zehneck, das sich in den um das Dreieck beschriebenen Kreis legen läßt?

3) Eine Kugel von 10 cm Halbmesser ist durch eine Ebene so geschnitten, daß die aus der Kugeloberfläche enstandenen Hauben sich wie 1 : 4 verhalten. a) Welchen Inhalt hat das kleine Kugelsegment? b) Welches Volumen hat der Kegelstumpf, dessen Grundflächen einem größten Kreise der Kugel und diesem Schnittkreise entsprechen und dessen Oberfläche der größeren Kugelhaube gleichkommt?

5) In Unterfranken.

Im Jahre 1895. 1) Jemand besitzt eine goldene und eine silberne Uhr, eine goldene und eine silberne Kette. Die goldene Kette ist 120 ℳ, die silberne 40 ℳ wert; die goldene Uhr und die goldene Kette sind zusammen 220 ℳ mehr wert, als die silberne Uhr mit der silbernen Kette. Goldene Uhr und silberne Kette sind zusammen $1^1/_3$ mal so viel wert, als silberne Uhr mit goldener Kette. Man berechne den Wert jeder Uhr!

2) Ein Kaufmann erhält 2 Sendungen Leinwand; die erste kostet 1560 ℳ, die zweite 1280 ℳ; die zweite enthielt 4 Stück mehr als die erste, aber jedes Stück war 6 ℳ billiger, als bei der ersten. Wie viele Stücke enthielt die erste Sendung und wie teuer war jedes Stück?

3) Bei einem rechteckigen Parallelepiped verhalten sich die 3 Dimensionen wie 2 : 5 : 11. Wie groß sind dieselben, wenn die ganze Oberfläche 880,875 qcm beträgt?

4) Die Grundfläche eines Prismas bildet eine Raute von 136 cm Umfang und 92 cm diagonaler Summe, während die Höhe des Körpers 9 m mißt. Wenn nun eine Kugel ein um 462,92 ccm geringeres Volumen als das Prisma hat, wie groß ist die Oberfläche dieser Kugel?

Anhang VI.

Zusammenstellung geometrischer Formeln.

a) Planimetrische Formeln.

1) Zwischen n Punkten sind höchstens $\frac{n(n-1)}{2}$ Gerade möglich.

2) n Gerade schneiden sich höchstens in $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkten.

3) Das n-Eck hat $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen.

4) Die Winkelsumme des n-Eckes ist $n \cdot 2\,R - 4\,R = 2\,(n-2)$ Rechte.

5) Die Außenwinkel am Polygon betragen 4 R.

6) Rechteck:

1) $F = g \cdot h;\ g = \frac{F}{h};\ h = \frac{F}{g}.$

2) $d = \sqrt{g^2 + h^2}$; d = Diagonale.

7) Quadrat:

1) $F = a^2;\ a = \sqrt{F}.$

2) $d = a\sqrt{2};\ a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$

8) Parallelogramm:

$$F = g \cdot h;\ g = \frac{F}{h};\ h = \frac{F}{g}.$$

9) Rhombus:

$F = \frac{d \cdot d_1}{2}$; d und d_1 = Diagonalen.

10) Ungleichseitiges Dreieck:

1) $F = \frac{g \cdot h}{2} = g \cdot \frac{h}{2} = \frac{g}{2} \cdot h;\ g = \frac{2F}{h} = \frac{F}{\frac{1}{2}h};$

$$h = \frac{2F}{g} = \frac{F}{\frac{1}{2}g}.$$

2) $F = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)};\ s = \frac{a+b+c}{2};$

$$h = \frac{2}{g}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

11) Gleichseitiges Dreieck:

1) $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$

2) $F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$

12) Gleichschenkliges Dreieck:

1) $h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2a+b)(2a-b)}.$

2) $F = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2} = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2} = \frac{b}{4}\sqrt{(2a+b)(2a-b)}$;

a = Schenkel, b = Basis.

13) Rechtwinkliges Dreieck:

1) $c^2 = a^2 + b^2$; $c = \sqrt{a^2 + b^2}.$

2) $a^2 = c^2 - b^2$; $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c+b)(c-b)}.$

3) $b^2 = c^2 - a^2$; $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}.$

4) $F = \frac{a \cdot b}{2}$; a und b = Katheten, c = Hypotenuse.

5) $a = n^2 - m^2$; $b = 2\,mn$; $c = n^2 + m^2$. Formel für die Berechnung Pythagoreischer Dreiecke (S. 24).

14) Trapez:

$$F = \frac{a+b}{2} \cdot h;\ h = \frac{2\,F}{a+b} = \frac{F}{\frac{1}{2}(a+b)}.$$

15) Kreis: r = Radius, d = Durchmesser, p = Peripherie, F = Inhalt.

Gegeben:	I. r	II. d	III. p	IV. F
Gesucht:	1) $d = 2r$	$r = \frac{d}{2}$	$r = \frac{p}{2\pi}$	$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}}$
	2) $p = 2r\pi$	$p = d\pi$	$d = \frac{p}{\pi}$	$d = 2\sqrt{\frac{F}{\pi}}$
	3) $F = r^2\pi.$	$F = \frac{d^2\pi}{4}$	$F = \frac{p^2}{4\pi}$	$p = 2\sqrt{F\pi}.$

16) Kreisring:

1) $kr = R^2\pi - r^2\pi = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r)(R - r).$

2) $kr = \frac{D^2\pi}{4} - \frac{d^2\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(D + d)(D - d).$

3) $kr = \frac{P^2}{4\pi} - \frac{p^2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}(P + p)(P - p).$

17) Kreisbogen:

$$bg = \frac{2r\pi}{360} \cdot n = \frac{r\pi n}{180};\ n^0 = \text{Zentriwinkel.}$$

18) Kreissektor:

1) $sk = \frac{r^2\pi}{360} \cdot n;\ n^0 = \text{Zentriwinkel.}$

2) $sk = \frac{r \cdot bg}{2};\ bg = \text{Bogen.}$

19) Ringstück:

$$rst = \frac{R^2\pi n}{360} - \frac{r^2\pi n}{360} = \frac{\pi n}{360}(R^2 - r^2).$$

20) Umgeschriebene n=Eckseite u, wenn die eingeschriebene a und r gegeben sind:

$$u = \frac{2ra}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

21) Eingeschriebene 2n=Eckseite e, wenn die eingeschriebene n=Eckseite a und r gegeben sind:

$$e = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

22) Radius r des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises:

$$r = \frac{2F}{a + b + c}.$$

23) Radius R des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises:

$$R = \frac{abc}{4F}.$$

24) Ellipse: a und b die beiden Halbachsen:

1) $F = ab\pi.$

2) $p = \pi\sqrt{2(a^2 + b^2)}$; annähernd.

b) Stereometrische Formeln.

1) Würfel: O = Oberfläche, V = Volumen, a = Kante, D_1 = Seitendiagonale, A_1 = Diagonalachse, E_1 = Diagonalebene.

1) $O = 6a^2;\ a = \sqrt{\frac{O}{6}}.$

2) $V = a^3;\ a = \sqrt[3]{V}.$

3) $D_1 = a\sqrt{2};\ a = \frac{D_1}{\sqrt{2}} = \frac{D_1\sqrt{2}}{2}.$

4) $A_1 = a\sqrt{3};\ a = \frac{A_1}{\sqrt{3}} = \frac{A_1\sqrt{3}}{3}$.

5) $E_1 = a^2\sqrt{2};\ a = \sqrt{\frac{E_1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{E_1\sqrt{2}}{2}}$.

2) Rechtwinkliges Parallelepipedum:

1) $O = 2(ab + bc + ac)$.

2) $V = abc$.

3) $A_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

4) $E_{,} = c\sqrt{a^2 + b^2};\ E_{,,} = b\sqrt{a^2 + c^2};\ E_{,,,} = a\sqrt{b^2 + c^2}$.

3) Prisma: M = Mantel, G = Grundfläche, h = Höhe.

1) $O = 2G + M$.

2) $V = G \cdot h;\ G = \frac{V}{h};\ h = \frac{V}{G}$.

4) Pyramide:

1) $O = G + M$.

2) $V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{G}{3} \cdot h = G \cdot \frac{h}{3};\ G = \frac{3V}{h} = \frac{V}{\frac{1}{3}h};$

$h = \frac{3V}{G} = \frac{V}{\frac{1}{3}G}$.

5) Pyramidenstumpf:

1) $O = G + g + M$.

2) $V = \frac{h}{3}(G + g + \sqrt{G \cdot g})$.

6) Cylinder:

1) $M = 2r\pi \cdot h$.

2) $O = 2r^2\pi + 2r\pi h = 2r\pi(r + h)$.

3) $V = G \cdot h = r^2\pi \cdot h$.

7) Kegel: l = Seitenlänge.

1) $M = \frac{2r\pi}{2} \cdot l = r\pi l$.

2) $O = M + G = r\pi l + r^2\pi = r\pi(l + r)$.

3) $l = \sqrt{r^2 + h^2};\ h = \sqrt{l^2 - r^2}$.

4) $V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{G}{3} \cdot h = G \cdot \frac{h}{3} = \frac{r^2\pi h}{3} = \frac{r^2\pi}{3}\sqrt{l^2 - r^2};$

$G = \frac{3V}{h} = \frac{V}{\frac{1}{3}h};\ h = \frac{3V}{G} = \frac{V}{\frac{1}{3}G}$.

8) Kegelstumpf:

1) $M = \frac{2R\pi + 2r\pi}{2} \cdot l = \pi l\,(R + r).$

2) $O = G + g + M.$

3) $V = \frac{h\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$[1]

9) Ganze Kugel:

1) $O = 4 \cdot r^2\pi.$

$O = 4 \cdot \frac{d^2\pi}{4} = d^2\pi.$

$O = 4 \cdot \frac{p^2}{4\pi} = \frac{p^2}{\pi}.$

2) $V = 4r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{4r^3\pi}{3}.$

$V = d^2\pi \cdot \frac{d}{6} = \frac{d^3\pi}{6}.$

$V = \frac{p^2}{\pi} \cdot \frac{p}{6\pi} = \frac{p^3}{6\pi^2}.$

10) Teile der Kugel und Kugelfläche:

1) Kalotte = Zone = $2r\pi h.$

2) Kugelsektor = $2r\pi h \cdot \frac{r}{3} = \frac{2r^2\pi h}{3}.$

3) I. Kugelsegment = $h^2\pi\,(r - \frac{1}{3}h) = \frac{h^2\pi}{3}(3r - h),$ wenn h = Höhe der Kalotte und r = Kugelradius ist, und

II. Kugelsegment = $\frac{h\pi}{2}\left(a^2 + \frac{h^2}{3}\right)$, wenn statt des Kugelradius der Radius der Kalotte gegeben ist.

4) Zonenabschnitt = $\frac{h\pi}{2}(a^2 + b^2 + \frac{1}{3}h^2).$

Anhang VII.

Maße und Gewichte.

I. Maße und Gewichte des Deutschen Reiches.

1. Längenmaße.

Das Grundmaß ist das Meter (m).

Kilometer.		Meter.		Centimeter.		Millimeter.
km		m		cm		mm
1	=	1000	=	100 000	=	1 000 000
		1	=	100	=	1000
				1	=	10

Zusatz. Die geographische Meile = 7 420 m.
Die deutsche Meile (Neumeile) = 7 500 m = 7,5 km.
Die Seemeile = 0,25 geogr. Meile = 1,85 km.

2. Flächenmaße.

Quadratkilometer.		Quadratmeter.		Quadratcentimeter.		Quadratmillimeter.
qkm		qm		qcm		qmm
1	=	1 000 000				
		1	=	10 000	=	1 000 000
				1	=	100

1 Ar (a) = 100 qm; 1 Hektar (ha) = 100 a.

Zusatz. 1 bayr. Decimal = nahezu 34 qm.
1 „ Tagwerk = „ 34 a.
100 „ „ = „ 34 ha.

3. Körpermaße.

Kubikmeter.		Kubikcentimeter.		Kubikmillimeter.
cbm		ccm		cmm
1	=	100 000		
		1	=	1000

1 Liter (l) = 1000 ccm.
1 Hektoliter (hl) = 100 l.

Holzmaß. 1 Ster = 1 cbm, 1 Klafter = 3 Ster.

4. Gewichte.

Das Grundgewicht ist das Gramm (g); es ist das Gewicht von 1 ccm destillierten Wassers bei 4° C. Das Gewicht von 1 l Wasser ist 1 kg.

Tonne.		Kilogramm.		Gramm.		Milligramm.
t		kg		g		mg
1	=	1000				
		1	=	1000		
				1	=	1000

Bei 4° C wiegt	1 cbm	Wasser	1 t
	1 l = 1 cdm	„	1 kg
	1 ccm	„	1 g
	1 cmm	„	1 mg.

II. Maße und Gewichte einiger außerdeutschen Länder.

1. Frankreich, Belgien, Oesterreich und die Schweiz.

Im allgemeinen wie in Deutschland.

2. Großbritannien.

a) 1 Fuß à 12 Zoll = 0,305 m.
b) 1 Yard à 3 Fuß = 0,915 m.
c) 1 British Mile à 1760 Yards = 1,609 km.
d) 1 Acre = 40,46 a.
e) 1 Quarter à 8 Bushel = 290,79 l.
f) 1 Imperial-Gallon à 4 Quarts à 2 Pints = 4,54 l
g) 1 Hundreweight à 112 Pound = 50,802 kg.

3. Rußland.

a) 1 Fuß à 10 Decimaltum = 0,297 m.
b) 1 Arschin = 0,711 m.
c) 1 Werst à 500 Saschen = 1066,78 m.
d) 1 Dessätine à 2400 Quadrataschen = 109,25 a.
e) 1 Tschetwert à 8 Tschetwerik = 209,902 l.
f) 1 Wedro à 10 Krutschka = 12,3 l.
g) 1 Pud à 40 Pfund à 32 Lot = 16,379 kg.

Alphabetisches Register.

(Die Zahlen bedeuten die Seiten.)

Dieses Buch trägt den Anforderungen Rechnung, welche die neuere Pädagogik an den naturgeschichtlichen Unterricht stellt und will den H. H. Lehrern die Vorbereitung auf dieses Unterrichtsfach erleichtern. Es hat in der Fachpresse eine sehr günstige Aufnahme gefunden, dient bereits in vielen Schulen als Grundlage des naturgeschichtlichen Unterrichts, wurde von den Kgl. Regierungen der meisten bayerischen Kreise den Fortbildungskursen der Schuldienstexspektanten zum Studium empfohlen und **vom Hohen Kgl. Bayerischen Staatsministerium in das Verzeichnis der für Volks- und Fortbildungsschulen gebilligten Lehrmittel aufgenommen.**

Heilmanns Ratgeber .... Wir wünschten nur, daß jedes Kind in der vom Verfasser angegebenen Weise unterrichtet würde; der Erfolg würde nicht ausbleiben ....

Schulblatt für Thüringen und Franken .... Im ganzen genommen, müssen wir das Buch als ein sehr gutes bezeichnen und allen Volksschullehrern angelegentlichst empfehlen.

Schulblatt für Hessen-Nassau.... Ein vorzügliches Buch, das in jeder Schul- und in jeder Lehrerbibliothek einen Platz verdient....

Fuß K., Der erste Unterricht in der Naturgeschichte. Ein Wiederholungsbuch für die Hand der Schüler; I. Kursus (Unterklasse) 0,40 Mk.; II. Kursus (Mittelklasse) 0,55 Mk.; III. Kursus (Oberklasse) 0,80 Mk.

Schulanzeiger für Unterfranken, Nr. 9, 1895 .... Das Werkchen gehört mit zu dem Besten, was in dieser Art vorhanden ist ....

Literaturblatt für katholische Erzieher, Nr. 8, 1895 .... Ein erfolgreicher Unterricht nach diesem Werkchen ist sicher zu erwarten.

Mittelfränkisches Schulblatt, Nr. 16, 1895 .... Die Darbietung der geist- und gemütvollen Zugaben wirkt anregend und belebend. Die Hefte gehören sicher zu den besten gleicher Art.

Fuß K., Lehrbuch der Physik und Chemie, ein Hilfsmittel für Lehrer und Lehrerinnen, zweite Auflage; 2,40 Mk.

Pädagogischer Jahresbericht von Dr. Dittes .... Der Unterricht, in dem Geiste dieses Buches geleitet, kann nur von dem besten Erfolge gekrönt werden. Dr. Rothe.

Bayerische Lehrerzeitung, Nr. 21, 1893 .... Dieses Buch bietet sich dem Lehrer als durchaus zuverlässiger Führer und als vortreffliches Hilfsmittel zur Vorbereitung auf den Unterricht an und es läßt sich mit Sicherheit voraussagen, daß es sich zahlreiche Freunde erwerben wird ....

Die Natur, Nr. 34, 1893 .... Wir haben in diesen Blättern schon die erste Auflage dieses praktischen Buches mit Anerkennung begrüßt und die zweite Auflage ist noch besser geworden .... Das Buch ist ein vorzügliches, wie wir es von dem Verfasser nicht anders gewohnt sind ....
(Dr. K. Müller.)

In Bayern amtlich empfohlen (Ministerial-Blatt Nr. 30, 1893.)

Fuß K., Kleine Naturlehre (Schülerbuch zum vorhergenannten Lehrbuch), 0,50 Mk.

Pädagogische Blätter für Lehrerbildung .... Das Büchlein ist vortrefflich ....

Literaturblatt für kath. Erzieher .... Kann als vortreffliches Lehrmittel empfohlen werden.

Pädagogium von Dr. Dittes.... Außer durch seinen präzisen Inhalt empfiehlt sich das Büchlein auch durch seine sehr nette Ausstattung.

Nürnberg, im März 1896.

Hochachtungsvoll

Die Verlagsbuchhandlung.

Sammlung von Konstruktions- und Rechenaufgaben aus der Planimetrie und Stereometrie für den Schul- und Selbstunterricht

Nürnberg 1896